HACIA LOS VECTORES

UN CURSO PREPARATORIO PARA FÍSICA UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS

JOSÉ DI PAOLO

HACIA LOS VECTORES

UN CURSO PREPARATORIO PARA FÍSICA UNIVERSITARIA

JOSÉ DI PAOLO *

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS

PRIMERA EDICIÓN. 2º IMPRESIÓN REVISADA.

2008

* RUTA 11, KM 10, 3101, ORO VERDE, ENTRE RÍOS, ARGENTINA

TEL.: 54-343-4975100/101/077

E-MAIL: jdipaolo@bioingenieria.edu.ar

www.bioingenieria.edu.ar

A los estudiantes que cada año inician una nueva etapa de su vida: el paso por la universidad.

El autor es Ingeniero Mecánico (UTN-1988), Doctor en Ciencias de la Ingeniería (UNC-1995) y Profesor Asociado Ordinario de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos. En su carácter de docente e investigador de la institución, está a cargo de las cátedras Física I y Mecánica del Continuo de la carrera de Bioingeniería y del Grupo Biomecánica Computacional donde se desarrollan distintas líneas de investigación de fenómenos mecánicos relacionados con el cuerpo humano. Es Director del Departamento Físico-Química y miembro del Consejo Directivo de la Facultad. Anualmente está a cargo del curso en el área Física para alumnos ingresantes.

Tema 1: FÍSICA Y MEDICIÓN.

"La filosofía se escribe en ese gran libro que nunca miente ante nuestra asombrada mirada, me refiero al Universo, pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos con los cuales está escrito. El libro está escrito en el lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin la ayuda de las cuales es imposible concebir una sola palabra de él, y sin las cuales uno vaga inútilmente por un oscuro laberinto". Galileo Galilei.

La Física (la filosofía a la cual se refería Galileo) es la ciencia fundamental relacionada con la comprensión de los fenómenos naturales que ocurren en nuestro Universo. Como todas las ciencias fácticas, la Física parte de observaciones experimentales y mediciones cuantitativas. El principal objetivo de la Física es utilizar el limitado número de leyes que gobiernan los fenómenos naturales para predecir los resultados de futuros experimentos. Las leyes fundamentales se expresan en el lenguaje de las matemáticas, herramienta que brinda un puente entre la teoría y el experimento. Es decir, el conjunto de las leyes de la Física en un lenguaje cuantitativo y operativo como el matemático, constituye el modelo de la naturaleza hasta donde se la conoce.

Cuando surge una discrepancia entre la teoría y el experimento, deben formularse nuevas teorías y experimentos para eliminar la discrepancia. Muchas veces una teoría es satisfactoria solo en condiciones limitadas; una teoría más general podría ser satisfactoria sin estas limitaciones. Un ejemplo clásico son las leyes del movimiento de Newton que describen con precisión el movimiento de cuerpos a velocidades normales, pero que no se aplican a objetos que se mueven a velocidades comparables con la velocidad de la luz. La teoría especial de la relatividad desarrollada por Einstein predice con buenos resultados el movimiento de objetos a baja velocidad y a velocidades que se acercan a la velocidad de la luz, por eso es una teoría de movimiento más general. Cuando una teoría se confirma siempre con los experimentos, se convierte en ley.

La Física clásica, que equivale a toda la Física desarrollada hasta antes de 1900, incluye las teorías, conceptos, leyes y experimentos de la mecánica clásica, la termodinámica y el electromagnetismo. Galileo Galilei (1564-1642) hizo importantes contribuciones a la mecánica clásica con su trabajo sobre el movimiento con aceleración constante. En la misma época, Johannes Kepler (1571-1630) analizó datos astronómicos para enunciar leyes empíricas para el movimiento de cuerpos planetarios. Posteriormente, Newton sienta las bases de la Mecánica cuando enuncia sus tres principios y la ley de gravitación universal.

1.1) Patrones de longitud, masa y tiempo.

Las leyes de la Física se expresan en función de magnitudes fundamentales que requieren una definición clara. Por ejemplo, magnitudes físicas como fuerza, velocidad, volumen y aceleración pueden describirse en función de magnitudes más básicas que, a su vez, se definen en función de mediciones o de la comparación con patrones establecidos. En mecánica, las tres magnitudes elegidas como fundamentales son longitud (L), masa (M) y tiempo (T). Las otras magnitudes físicas en la mecánica pueden expresarse en función de esas tres.

En 1960, un comité internacional estableció un conjunto de patrones para estas magnitudes fundamentales. El sistema que se integró es una adaptación del sistema métrico y recibe el nombre de Sistema Internacional (SI) de unidades. En este sistema las unidades de longitud, masa y tiempo son el metro, el kilogramo y el segundo, respectivamente. Otras unidades patrón del SI establecidas por el comité son las correspondientes a la temperatura (el kelvin), la corriente eléctrica (el ampere), la intensidad luminosa (la candela) y la relativa a la cantidad de sustancia (el mol). Estas son las siete unidades básicas del SI. En el estudio de la mecánica sin embargo, se tratará sólo con las unidades de longitud, masa y tiempo. Las definiciones de las unidades están bajo revisión constante y pueden cambiar con el tiempo.

1.1.1) Definición de la unidad de Longitud:

En 1960, la longitud de un metro se definió como la distancia entre dos líneas trazadas sobre una barra de platino-iridio almacenada en condiciones controladas. Este patrón se abandonó por varias razones; la principal fue el hecho de que la limitada precisión con la cual puede determinarse la separación entre las líneas sobre la barra no cubre las necesidades actuales de la ciencia y la tecnología. Recientemente, el metro fue definido como 1.650.763,73 longitudes de onda de la luz naranja-roja emitida por una lámpara de kriptón 86. Sin embargo, en octubre de 1983, el metro se redefinió como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299.792.458 segundos. En efecto, esta última definición se basa en que la velocidad de la luz en el vacío es 299.792.458 metros por segundo.

1.1.2) Definición de la unidad de Masa:

La masa puede definirse como la propiedad de un cuerpo que mide la resistencia a variar su velocidad. La unidad fundamental de la masa en el SI, el kilogramo, se define como la masa de un cilindro determinado de aleación de platino-iridio que se conserva en el Laboratorio Internacional de Pesas y Medidas de Sevres, Francia. Este patrón de masa se estableció en 1987, y desde ese momento no ha habido cambios en virtud de que el platino-iridio es una aleación inusualmente estable. Un duplicado se conserva en el Instituto Nacional de Patrones y Tecnologías (NIST) en Gaithersburg, USA.

1.1.3) Definición de la unidad de Tiempo:

Antes de 1960 el patrón del tiempo se había definido en función del día solar medio para el año de 1900. El segundo solar medio, que representa la unidad básica de tiempo, se definió como (1/60)x(1/60)x(1/24) del día solar medio. Sin embargo, en la actualidad se sabe que la rotación de la Tierra varía sustancialmente con el tiempo, por lo que no es adecuado emplear este movimiento en la definición de un patrón.

En 1967, en consecuencia, el segundo se redefinió para aprovechar la ventaja de la alta precisión que podía obtenerse en un dispositivo conocido como *reloj atómico*. En este dispositivo las frecuencias asociadas con ciertas transiciones atómicas (las cuales son en extremo estables e insensibles al ambiente del reloj) pueden medirse hasta una precisión de una parte en 10^{12}. Esto es equivalente a una incertidumbre menor que un segundo cada 30.000 años. De este modo, en 1967 la unidad de tiempo del SI, el segundo, fue redefinida usando la frecuencia característica de un tipo particular de átomo de cesio como el “reloj de referencia”. La unidad de tiempo básica del SI, el segundo, se definió como 9.192.631.770 períodos de la radiación de átomos de cesio 133.

1.2) Sistemas de unidades.

Además del SI, hay otros dos sistemas de unidades que se pueden encontrar en la literatura técnica. El *sistema cgs* se empleó en Europa antes del SI, y el *sistema de ingeniería británico* (algunas veces llamado sistema convencional) aún se emplea en Estados Unidos a pesar de la aceptación del SI por el resto del mundo. En el sistema *cgs* las unidades de longitud, masa y tiempo son el centímetro (cm), el gramo (g) y el segundo (s), respectivamente; en el sistema de ingeniería británico, las unidades de longitud, masa y tiempo son el pie (pie), el slug y el segundo, respectivamente.

Algunos de los prefijos utilizados con mayor frecuencia para definir múltiplos y submúltiplos de las unidades patrón, se basan en las potencias de 10. Sus abreviaturas se listan en la siguiente tabla. Por ejemplo, 10^{-3} m es equivalente a 1 milímetro (mm) y 10^{3} m es 1 kilómetro (km). De manera similar, 1kg es 10^{3}g y 1 megavolt (MV) es 10^{6} volts.

Potencia	***Prefijo***	***Abreviatura***
10^{-24}	*Yocto*	*y*
10^{-21}	*Zepto*	*z*
10^{-18}	*Ato*	*a*
10^{-15}	*Femto*	*f*
10^{-12}	*Pico*	*p*
10^{-9}	*Nano*	*n*
10^{-6}	*Micro*	*μ*
10^{-3}	*Mili*	*m*
10^{-2}	*Centi*	*c*
10^{-1}	*Deci*	*d*
10^{1}	*Deca*	*da*
10^{3}	*Kilo*	*k*
10^{6}	*Mega*	*M*
10^{9}	*Giga*	*G*
10^{12}	*Tera*	*T*
10^{15}	*Peta*	*P*
10^{18}	*Exa*	*E*
10^{21}	*Zeta*	*Z*
10^{24}	*Yota*	*Y*

1.3) Análisis dimensional.

La palabra dimensión tiene un significado especial en Física. Suele significar la naturaleza física de una magnitud. Ya sea que se mida una distancia en unidades pies o metros, se trata de una distancia y se dice que su dimensión es la longitud.

Los símbolos empleados para especificar longitud, masa y tiempo son L, M y T, respectivamente. A menudo se emplean corchetes [ ] para indicar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, el símbolo utilizado para la velocidad es *v*, y las dimensiones de velocidad se escriben [*v*] = L/T. Como otro ejemplo, las dimensiones de área, A, son [A] = L^2. Las dimensiones de área, volumen, velocidad y aceleración se registran en la siguiente tabla junto con sus unidades en los tres sistemas más comunes. Las dimensiones de otras magnitudes, como fuerza y energía, se describirán a medida que se presenten.

Sistema	**Área** (L^2)	**Volumen** (L^3)	**Velocidad** (L/T)	**Aceleración** (L/T^2)
SI	m^2	m^3	m/s	m/s^2
Cgs	cm^2	cm^3	cm/s	cm/s^2
De ingeniería británico	pie^2	pie^3	pie/s	pie/s^2

En muchas situaciones será necesario deducir o verificar una fórmula específica. Aunque se hayan olvidado los detalles de la deducción, hay un útil y eficaz método conocido como *análisis dimensional* que puede utilizarse en la deducción o verificación de su expresión final. Este procedimiento se debe emplear siempre, puesto que ayudará a minimizar la memorización rutinaria de ecuaciones. El análisis dimensional aprovecha el hecho de que *las dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas*. Es decir, las cantidades pueden sumarse o restarse solo si tienen las mismas dimensiones. Asimismo, los términos en ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Con estas sencillas reglas se puede emplear el análisis dimensional para determinar si una expresión tiene o no la forma correcta.

Para ilustrar este procedimiento, supóngase que se desea obtener una fórmula para el desplazamiento *x* experimentado por un móvil en un tiempo *t,* si parte del reposo y se mueve con aceleración constante *a*. La expresión correcta es $x = \frac{1}{2}at^2$. Se utilizará el análisis dimensional para comprobar la validez de esta expresión.

La magnitud *x* en el lado izquierdo tiene la dimensión de longitud. Para que la ecuación sea dimensionalmente correcta, la cantidad en el lado derecho también debe tener esa misma dimensión. Se puede efectuar una comprobación dimensional al sustituir las dimensiones de la aceleración, L/T^2 y el tiempo T, en la ecuación. Es decir, la forma dimensional de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$ es:

$$L = \frac{L}{T^2}T^2 = L$$

Las unidades de tiempo se cancelan y queda la unidad de longitud.

Un procedimiento más general con el análisis dimensional es escribir una expresión de la forma:

$$x \propto a^n t^m$$

donde n y m son exponentes que deben determinarse, y el símbolo $\propto$ indica una proporcionalidad. Esta relación sólo es correcta si las dimensiones de ambos lados son iguales. Puesto que la dimensión del lado izquierdo es longitud, la dimensión del lado derecho también debe serlo. Es decir:

$$\left[a^n t^m\right] = L$$

En vista de que la dimensión de la aceleración es L/T^2 y la dimensión de tiempo es T, se tiene:

$$\left(L/T^2\right)^n T^m = L$$

o

$$L^n T^{m-2n} = L$$

Como los exponentes de L y T deben ser los mismos en ambos lados, se ve que *n=1* y *m=2*. En consecuencia se concluye que:

$$x \propto at^2$$

Este resultado difiere de la expresión correcta, la cual es $x = \frac{1}{2}at^2$. Debido a que el factor ½ es adimensional, no hay forma de determinar esto vía un análisis dimensional.

1.4) Conversión de unidades.

Algunas veces es necesario convertir unidades de un sistema a otro. Los factores de conversión entre las unidades del SI y convencionales de longitud son como siguen:

$$1milla = 1.609m = 1,609km$$

$$1m = 39,37pulg = 3,281pie$$

$$1pie = 0,3048m = 30,48cm$$

$$1pulg = 0,0254m = 2,54cm$$

Es posible tratar a las unidades como cantidades algebraicas que pueden cancelarse entre sí. Por ejemplo, si se desea convertir 15,0 pulg a cm, como 1pulg = 2,54cm, se encuentra que:

$$15{,}0pu\lg = (15{,}0pu\lg)\left(2{,}54\frac{cm}{pu\lg}\right) = 38{,}1cm$$

LONGITUD

	m	cm	km	Pulg.	pie	mi
1 metro	1	10^{2}	10^{-3}	39,37	3,281	$6{,}215\text{x}10^{-4}$
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0,3937	$3{,}281\text{x}10^{-2}$	$6{,}215\text{x}10^{-6}$
1 kilómetro	10^{3}	10^{5}	1	$3{,}937\text{x}10^{4}$	$3{,}281\text{x}10^{3}$	0,6214
1 pulgada	$2{,}540\text{x}10^{-2}$	2,540	$2{,}540\text{x}10^{-5}$	1	$8{,}333\text{x}10^{-2}$	$1{,}578\text{x}10^{-5}$
1 pie	0,3048	30,48	$3{,}048\text{x}10^{-4}$	12	1	$1{,}894\text{x}10^{-4}$
1 milla	1.609	$1{,}609\text{x}10^{5}$	1,609	$6{,}335\text{x}10^{4}$	5.280	1

MASA

	kg	G	slug	u
1 kilogramo	1	10^{3}	$6{,}854\text{x}10^{-2}$	$6{,}024\text{x}10^{26}$
1 gramo	10^{-3}	1	$6{,}854\text{x}10^{-5}$	$6{,}024\text{x}10^{23}$
1 slug	14,59	$1{,}459\text{x}10^{4}$	1	$8{,}789\text{x}10^{27}$
1 unidad de masa atómica	$1{,}660\text{x}10^{-27}$	$1{,}660\text{x}10^{-24}$	$1{,}138\text{x}10^{-28}$	1

TIEMPO

	S	min	h	día	año
1 segundo	1	$1{,}667\text{x}10^{-2}$	$2{,}778\text{x}10^{-4}$	$1{,}157\text{x}10^{-5}$	$3{,}169\text{x}10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1{,}667\text{x}10^{-2}$	$6{,}944\text{x}10^{-4}$	$1{,}901\text{x}10^{-6}$
1 hora	3.600	60	1	$4{,}167\text{x}10^{-2}$	$1{,}141\text{x}10^{-4}$
1 día	$8{,}640\text{x}10^{4}$	1.440	24	1	$2{,}738\text{x}10^{-3}$
1 año	$3{,}155\text{x}10^{7}$	$5{,}259\text{x}10^{5}$	$8{,}765\text{x}10^{3}$	365,2	1

1.5) Cálculos de órdenes de magnitud.

Con frecuencia, en Física es conveniente calcular una respuesta aproximada a un problema, más aún cuando se dispone de poca información. Estos resultados pueden emplearse para determinar si es o no necesario un cálculo más preciso. Estas aproximaciones suelen tener como origen ciertas suposiciones que deben ser modificadas si se buscase más precisión. Así, en ocasiones se hará referencia al orden de magnitud de cierta cantidad como la potencia de 10 del número que describe dicha cantidad. Si, por ejemplo, se dice que una cantidad aumenta su valor en tres órdenes de magnitud, esto significa que su valor aumenta en un factor de 10^3 =1.000.

Un ejemplo sencillo de aproximación fundada en órdenes de magnitudes sería el siguiente: supongamos un móvil en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es decir con aceleración constante, que en el instante de tiempo *t=0* se encuentra en el origen, siendo su velocidad 100m/s. Si su aceleración es de 10^{-3}m/s^2, su posición al cabo de 100s será:

$$x = V_o t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1\text{-}1)$$

Luego,

$$x = 100\frac{m}{s}100s + \frac{1}{2}10^{-3}\frac{m}{s^2}(100s)^2$$
$$x = 10^4 m + 5m = 10.005m$$

Como vemos, el 1° término de la expresión (1-1) es de orden 4 mientras que el del 2° término es de orden cero. Por ello, un preciso y rápido primer análisis podría hacerse sólo con el primer término de la expresión (1-1), es decir:

$$x = V_o t = 10^4 m$$

El error porcentual cometido, en este caso por defecto, sería:

$$E\,\% = \frac{10.000 - 10.005}{10.000}100 = -5x10^{-2}\,\% = -0{,}05\,\%$$

lo cual corrobora la validez de la aproximación.

1.6) Cifras significativas

Cuando se miden ciertas magnitudes, sus valores se conocen sólo hasta los límites de la incertidumbre experimental. El valor de ésta depende de varios factores como: la calidad del aparato, la habilidad del experimentador y el número de mediciones efectuadas.

Supóngase que en un experimento en el laboratorio se nos pide medir el área de una placa rectangular con una regla métrica como instrumento de medición. Supóngase también que la precisión hasta la cual se puede hacer una medición particular de la placa es ±0,1cm. Si la longitud de la placa es 16,3cm, se puede afirmar que su longitud se encuentra entre 16,2cm y 16,4cm. En este caso se dice que el valor medido tiene tres cifras significativas. De igual manera, si se encuentra que su ancho mide 4,5cm el valor real se encuentra entre 4,4cm y 4,6cm. Este valor medido tiene sólo dos cifras significativas. Advierta que las cifras significativas incluyen el primer dígito estimado. Así, se podrán escribir los valores medidos como $16,3 \pm 0,1$cm y $4,5 \pm 0,1$cm.

Supóngase ahora que se busca el área de la placa al multiplicar los dos valores medidos. Si se afirmara que el área es (16,3cm)(4,5cm)=73,35cm^2, la respuesta no tendría justificación debido a que contiene 4 cifras significativas, cantidad que es mayor al número de cifras significativas en cualquiera de las longitudes medidas. Una buena regla práctica para usar como guía en la determinación de cifras significativas es la siguiente:

Cuando se multiplican varias cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la menos precisa de las cantidades multiplicadas, donde "menos precisa" significa "tener el menor número de cifras significativas". La misma regla se aplica a la división.

Al aplicar esta regla al ejemplo de multiplicación anterior, se ve que la respuesta para el área sólo puede tener dos cifras significativas. Por consiguiente, todo lo que se puede afirmar es que el área es de 73cm^2, reconociendo que el valor puede variar entre (16,2cm)(4,4cm)=71cm^2 y (16,4cm)(4,6cm)=75cm^2.

Los ceros pueden o no ser cifras significativas. Los utilizados para colocar la coma decimal en número como 0,03 y 0,0075 no son significativos. En este caso hay una o dos cifras significativas, respectivamente. Sin embargo, cuando la posición de los ceros viene después de otros dígitos existe la posibilidad de una interpretación incorrecta. Por ejemplo, supóngase la masa de un objeto de 1.500g. En estos casos es común utilizar la notación científica para indicar el número de cifras significativas. Es decir, se podría expresar la masa como $1,5 \times 10^3$g si hubiera dos cifras significativas en el valor medido (si hemos medido con precisión de 100g.); $1,50 \times 10^3$g si hubiera tres cifras significativas (precisión de 10g), y 1,500g x 10^3 si hubiera cuatro (precisión de 1g). Del mismo modo, 0,00015 debe expresarse en notación científica como $1,5 \times 10^{-4}$ si tuviera dos cifras significativas o como $1,50 \times 10^{-4}$ si tuviera tres. Los tres ceros entre el punto decimal y el dígito 1 en el número 0,00015 no se cuentan como cifras significativas por que solo están presentes para ubicar el punto decimal. En general, una cifra significativa es un dígito conocido confiablemente.

En la adición y la sustracción, el número de lugares decimales debe considerarse cuando se determina cuántas cifras significativas se van a indicar.

Cuando se suman o restan números, el número de decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de decimales en cualquier término de la suma.

Por ejemplo, al sumar 123+5,35; la respuesta sería 128 y no 128,35. En la suma 1,0001+0,0003=1,0004; el resultado tiene cinco cifras significativas, aún cuando uno de los términos en la suma, 0,0003, sólo tiene una cifra significativa. De igual modo, en la sustracción 1,002-0,998=0,004, el resultado tiene sólo una cifra significativa aunque un término tiene cuatro cifras significativas y el otro tiene tres.

1.7) Problemas de aplicación

1) Un lote de construcción rectangular mide 100,0 pie por 150,0 pie. Determine el área de este lote en m^2.

R: 1.393 m^2

2) La ley de Newton de la gravitación universal es: $F = G\frac{Mm}{r^2}$, en la cual F es la fuerza de la gravedad, M y m son las masas y r es una longitud. La fuerza tiene las unidades $kg.{m}/{s^2}$ del SI. ¿Cuáles son la unidades SI de la constante G?

R: $[G] = \frac{m^3}{s^2 kg}$

3) Un galón de pintura (volumen = 3,78 10^{-3} m^3) cubre un área de 25,0m^2. ¿Cuál es el espesor de la pintura en la pared?

R: 1,51x10^{-4} m

4) Una pirámide tiene una altura de 481 pie y su base cubre un área de 13,0 acres (1 acre = 43.560 pie^2). Si el volumen de una pirámide está dado por la expresión $V = (1/3)Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura, encuentre el volumen de esta pirámide en metros cúbicos.

R: 2,571x10^6 m^3

5) El radio medio de la Tierra es 6,37x10^6m y el de la Luna es de 1,74x10^8cm. Con estos datos calcule, (a) La proporción entre el área superficial de la Tierra y la de la Luna y (b) la proporción de volúmenes de la Tierra y de la Luna. Recuerde que el área de la superficie de una esfera es $4\pi r^2$ y su volumen es $(4/3)\pi r^3$.

R: a) 13,4 , b) 49,1

6) Considere 60 latidos del corazón humano por minuto y calcule el número de latidos durante una vida promedio de 70 años.

R: 220,752x10^7

7) En 1.946 se determinó la distancia de la Tierra a la Luna usando un radar. Si el viaje ida y vuelta de la Tierra a la Luna le toma al haz del radar 2,56s. ¿Cuál es la distancia de la Tierra a la Luna? (la velocidad de las ondas del radar es 3,00x10^8m/s).

R: 384x10^6 m

8) Determine el número de cifras significativas en los siguientes números: a) 23cm; b) 3.589s; c) 4,67x10^3m/s; d) 0,0032m.

R: a) 2, b) 4, c) 3, d) 2

9) Efectúe las siguientes operaciones aritméticas: a) la suma de los números 756; 37,2; 0,83 y 2,5; b) el producto 3,2 x 3.563; c) el producto 5,6 x π.

R: a) 796, b) $1{,}1\times10^4$, c) 17

10) Un granjero desea medir el perímetro de un campo rectangular. La longitud de los lados largos es 38,44m y la longitud de los lados cortos, 19,5m. ¿Cuál es la longitud total alrededor del campo?.

R: 116 m

Tema 2: INTRODUCCIÓN A TRIÁNGULOS.

DEFINICIÓN: dados tres puntos A, B y C, que no pertenezcan a una misma recta, se llama triangulo *ABC* a la figura plana formada por el conjunto de los ángulos convexos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$

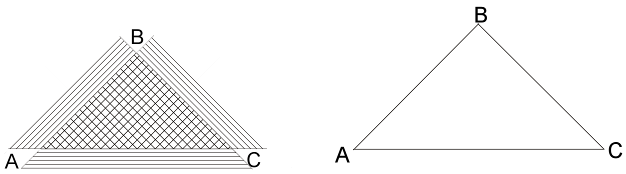


Fig. 2-1

2.1) Clasificación de los triángulos.

Según los lados: Equiláteros: cuando tienen sus tres lados iguales. Isósceles: cuando tienen dos lados iguales y uno desigual llamado base. Escalenos: cuando tienen sus tres lados desiguales.

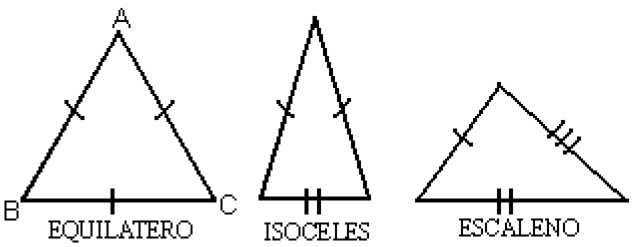


Fig 2-2

Según los ángulos: Rectángulos: cuando tienen un ángulo recto. Acutángulo: si tienen sus tres ángulos agudos. Obtusángulos: cuando tienen un ángulo obtuso.

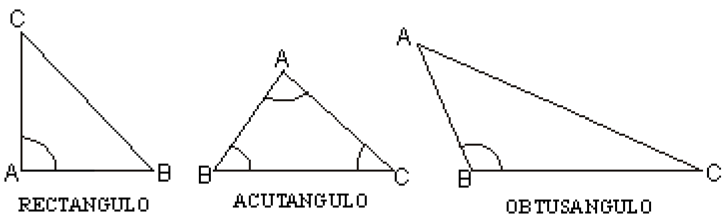
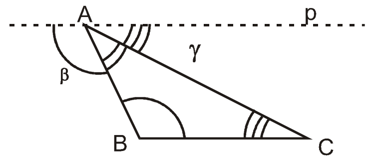


Fig. 2-3

2.1.1) Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Si medimos los ángulos interiores de un triangulo y sumamos los valores obtenidos, veremos que la suma es igual a 180°. Para afirmar esta propiedad demostraremos el siguiente Teorema.

TEOREMA: la suma de los ángulos interiores de un triangulo cualquiera es igual a 180°.



H) Se tiene un triángulo $A\hat{B}C$

donde $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos interiores

T) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ =180°

Fig. 2-4

D) Dibujando por el vértice A la recta p paralela a BC, se forman los ángulos consecutivos β, $\hat{A}$ y γ cuya suma forma un ángulo de 180°.

$$\beta + \hat{A} + \gamma = 180° \qquad (2.1)$$

Pero $\beta = \hat{B}$ por alternos internos entre las rectas paralelas p y BC y la secante AB

y $\gamma = \hat{C}$ por alternos internos entre p y BC y la secante AC. Reemplazando en (2.1) los valores de β y γ, resulta: $\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°}$

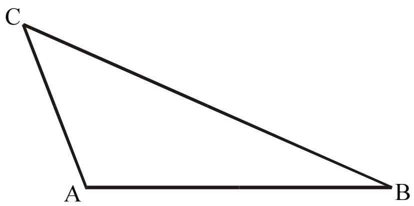
CONSECUENCIAS:

I) *Si en un triangulo, un ángulo es recto u obtuso, los otros dos son agudos.*

En efecto: si uno de los otros dos ángulos fuese recto u obtuso los tres ángulos sumarian más de 180º, lo cual es imposible por el teorema anterior. Luego esos dos ángulos son agudos.

En símbolos: Si $\hat{A} = 90°$; $\hat{B}$ *y* $\hat{C}$ *son agudos*

Si $\hat{A} > 90°$ *(obtuso),* $\hat{B}$ *y* $\hat{C}$ *son agudos*



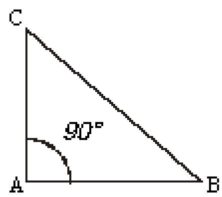


Fig. 2-5

II) *Si en dos triángulos, dos ángulos son respectivamente congruentes, los terceros también son congruentes* (entiéndase por congruencia a la igualdad).

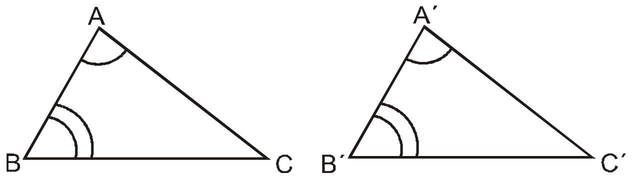


Fig. 2-6

En efecto: los terceros ángulos tienen el mismo suplemento, que es la suma de los otros dos.

En símbolos: Si $\hat{A} = \hat{A}'$
y $\hat{B} = \hat{B}'$
es $\hat{C} = \hat{C}'$ por ser suplementarios de (A + B) y (A´ + B´) respectivamente.

2.1.2) Ángulo exterior.

Se llama ángulo exterior de un triangulo a cada uno de los ángulos adyacentes a los ángulos interiores del mismo. β es exterior al triangulo ABC, pues β y $\hat{B}$ son adyacentes.

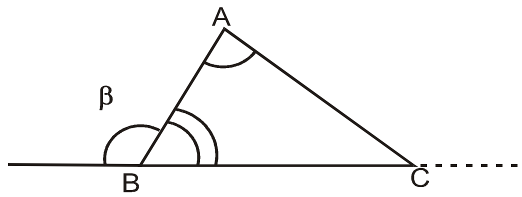


Fig. 2-7

<u>OBSERVACIÓN:</u> todo triangulo admite 6 ángulos exteriores.

<u>TEOREMA:</u> todo ángulo exterior es congruente con la suma de los interiores no adyacentes.

H) Dado el triángulo $A\hat{B}C$

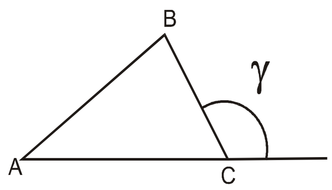
y siendo γ ángulo exterior

T) $\gamma = \hat{A} + \hat{B}$

D) Por ser γ exterior al triángulo $A\hat{B}C$, por hipótesis y por definición de ángulo exterior, resulta que:

$\gamma + \hat{C} = 180°$ (adyacentes)

Fig. 2-8



Además $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ (Teorema de los ángulos interiores)

Pero los segundos miembros son iguales, por lo tanto los primeros también lo serán:

$$\gamma+\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$$

y como $\hat{C}=\hat{C}$ (por propiedad reflexiva)

$$\boxed{\gamma=\hat{A}+\hat{B}}$$

<u>CONSECUENCIA:</u> *en todo triangulo un ángulo exterior es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes al mismo.*

En efecto, como todo ángulo exterior es congruente con la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes, resulta evidente que será mayor que cada uno de esos ángulos interiores.

2.1.3) Propiedades de los triángulos isósceles y equiláteros.

Triángulo isósceles: Consideremos un triángulo isósceles cualquiera y verifiquemos con un transportador el valor de cada uno de los ángulos opuestos a los lados iguales al triángulo.

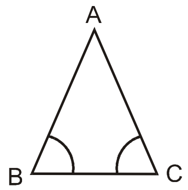


Fig. 2-9

Se constatará entonces, que estos dos ángulos son iguales. Esta comprobación puede efectuarse en cualquier triángulo isósceles; en consecuencia puede generalizarse, aceptando el siguiente postulado:

<u>POSTULADO DE LOS TRIÁNGULOS ISÓSCELES:</u> *En todo triángulo isósceles, a los lados iguales se le oponen ángulos iguales.*

<u>OBSERVACIÓN:</u> Este postulado también puede enunciarse así: *Los ángulos de la base de un triángulo isósceles, son iguales.*

En símbolos:

Si el triángulo $A\hat{B}C$ tiene $\overline{AB}=\overline{AC}$

es $\hat{B}=\hat{C}$

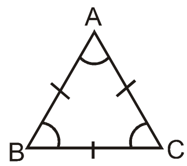
Triángulos Equiláteros: como los triángulos equiláteros tienen sus lados iguales por definición, puede comprobarse que sus ángulos opuestos también lo serán: por ello puede enunciarse lo siguiente.

PROPIEDAD DE LOS TRIANGULOS EQUILÁTEROS: los ángulos de todo triángulo equilátero son iguales y miden, cada uno, 60 grados.

Si el triángulo $A\hat{B}C$ tiene $\overline{CB} = \overline{CA} = \overline{AB}$

es $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

Fig. 2-10



2.1.4) Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo

TEOREMA: Si en un triángulo dos lados son desiguales, a mayor lado se le opone mayor ángulo.

H) Sea el triángulo $A\hat{B}C$; donde $\overline{BC} > \overline{AB}$

$\hat{A}$ opuesto al lado $\overline{BC}$

$\hat{C}$ opuesto al lado $\overline{AB}$

T) $\hat{A} > \hat{C}$

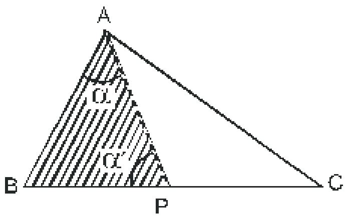


Fig. 2-11

D) Se sabe por hipótesis que $\overline{BC} > \overline{AB}$, luego podemos dibujar el lado menor sobre el lado mayor, a partir del vértice B, resultando el punto P interior al segmento BC y además: $\overline{AB} = \overline{BP}$

Se une A con P y se tiene que el triángulo *ABP* es isósceles pues $\overline{AB} = \overline{BP}$ por construcción.

$\Rightarrow \alpha = \alpha'$ Por el postulado de los triángulos isósceles.

y como $\hat{A} > \alpha$, resulta $\hat{A} > \alpha'$

En el $A\hat{P}C$: $\alpha' > \hat{C}$ por ser α' ángulo exterior

luego $\hat{A} > \alpha' > \hat{C}$

de donde $\hat{A} > \hat{C}$ por carácter transitivo de la desigualdad de los ángulos.

POSTULADO: en todo triángulo, cualquier lado es menor a la suma de los otros dos.

2.2) Triángulos rectángulos.

Conviene recordar que todo triangulo que tiene un *ángulo recto*, se llama *triángulo rectángulo.*

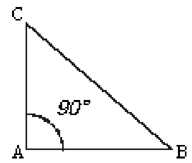


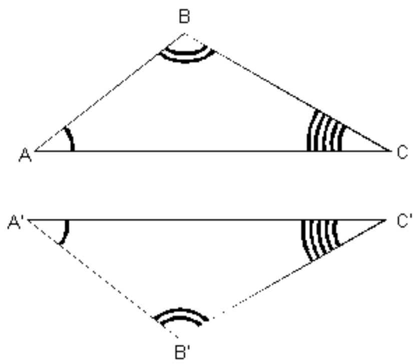
Fig. 2-12

Los lados que forman el ángulo recto, se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto, *hipotenusa.*

2.3) Igualdad de triángulos por congruencia.

La experiencia nos indica que, dado un triángulo ABC, si lo colocamos en papel transparente, se obtiene otro triangulo A´B´C´, que tiene sus tres lados iguales a los del primero y también los tres ángulos iguales a los del ABC. Se dice entonces, que los triángulos ABC y A´B´C´, son iguales o congruentes.

DEFINICIÓN: Dados los triángulos ABC y A´B´C´, se dice que *son congruentes cuando los lados y los ángulos del primero son respectivamente congruentes a los lados y ángulos del segundo*. O bien, *dos triángulos son iguales o congruentes, cuando puede deducirse uno de otro por un movimiento de traslación y/o rotación.*



$$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C' \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

Fig. 2-13

2.3.1) Propiedad de la congruencia de triángulos.

Como toda igualdad, goza de las siguientes propiedades:

PROPIEDAD REFLEXIVA: Todo triangulo es congruente a si mismo.

En símbolos:

$$A\hat{B}C = A\hat{B}C$$

PROPIEDAD SIMÉTRICA: Si un triángulo es congruente a otro, este es congruente al primero.

En símbolos:

$$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

$$A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C$$

PROPIEDAD TRANSITIVA: Si un triángulo es congruente a otro y este a su vez es congruente a un tercero, el primero es congruente al tercero.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}C = M\hat{N}P \\ M\hat{N}P = X\hat{Y}Z \end{array}\right\} A\hat{B}C = X\hat{Y}Z$$

CONSECUENCIA: Dos triángulos congruentes a un tercero, son congruentes entre sí.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}C = X\hat{Y}Z \\ M\hat{N}P = X\hat{Y}Z \end{array}\right\} A\hat{B}C = M\hat{N}P$$

2.4) Criterios de congruencia.

Los criterios de congruencia son las condiciones necesarias y suficientes para saber cuando dos triángulos son congruentes.

Por definición, puede decirse que dos triángulos son congruentes cuando lo son sus 6 elementos respectivamente. Pero esta condición no es independiente, pues basta que se cumpla la congruencia de algunos de sus elementos para que se verifiquen automáticamente la de los restantes. Como comprobaremos enseguida, puede afirmarse que, en general, *dos triángulos son congruentes, cuando lo son respectivamente 3 de sus elementos, entre los cuales figure, por lo menos, un lado.* Ud. puede comprobarlo gráficamente.

1er CRITERIO: Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, son congruentes.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BA} = \overline{B'A'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

2do CRITERIO: Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos respectivamente congruentes son congruentes.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right\} A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$$

3er CRITERIO: Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente congruentes son congruentes.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right\} A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$$

4to CRITERIO: Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, respectivamente congruentes, son congruentes.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{CA}=\overline{A'C'}\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \hat{C}=\hat{C}'\\ siendo\\ AB>AC\\ A'B'>A'C'\end{array}\right\} A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$$

2.5) Triángulos Semejantes.

En un triángulo ABC, tracemos una paralela al lado BC, que corte a los otros dos lados en D y E. (Fig. 2-14).

1°) Los ángulos de los triángulos ABC y ADE son iguales.

$\hat{A}$ es común, $\hat{B}=\hat{D}$ y $\hat{C}=\hat{E}$ (ángulos correspondientes entre paralelas).

2°) Existe proporcionalidad entre lados:

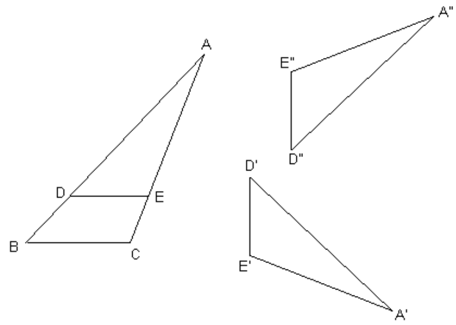


Fig. 2-14

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

Los triángulos ABC y ADE se dice que son semejantes. Observemos que son los lados opuestos a ángulos iguales los que son proporcionales, y los llamaremos *lados homólogos.*

DEFINICIÓN: Dos triángulos se llaman semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales. Se llama razón de semejanza la razón de dos lados homólogos.

De lo anterior, se puede deducir:

TEOREMA FUNDAMENTAL: Toda paralela a un lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero.

(Nombraremos siempre dos triángulos semejantes leyendo los vértices de los ángulos iguales en el mismo orden. Por ejemplo: ABC y ADE)

NOTA: Sean A’D’E’ y A’’D’’E’’ dos triángulos obtenidos desplazando el triángulo ADE. Estos triángulos son, evidentemente semejantes al ABC (ver figura 2-14).

2.5.1) Casos de semejanza de triángulos.

La semejanza de dos triángulos lleva consigo 3 igualdades de ángulos y 2 igualdades de razones entre lados. Vamos a ver que para establecer la semejanza de dos triángulos, bastan dos igualdades debidamente elegidas entre las cinco indicadas. Cada grupo de estas dos condiciones indispensables se llama *caso de semejanza.*

1° caso: Sean dos triángulos ABC y A’B’C’, tales que:

$\hat{A}=\hat{A}'$ y $\hat{B}=\hat{B}'$ (Figura 2-15)

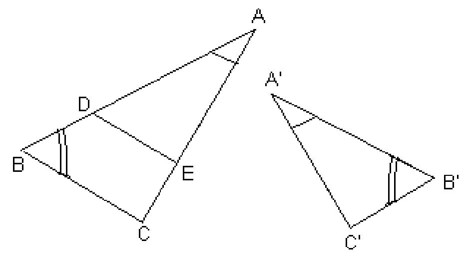


Fig. 2-15

Transladamos el triángulo A’B’C’ de manera que llegue a coincidir el ángulo $\hat{A}'$ con $\hat{A}$ y sean D y E las posiciones respectivas de los vértices B’ y C’. El ángulo $\hat{D}$, nueva posición de $\hat{B}'$ es, por hipótesis, igual al $\hat{B}$; pero como estos dos ángulos están en la posición de correspondientes, las rectas BC y DE serán paralelas, y los triángulos ABC y ADE son semejantes. Pero como los triángulos ADE y A’B’C’ son iguales, el triángulo ABC será semejante al A’B’C’. De aquí el enunciado:

Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.

En consecuencia, dos triángulos equiláteros o dos triángulos rectángulos isósceles son siempre semejantes.

COROLARIO: Si dos triángulos tienen sus lados paralelos o perpendiculares, son semejantes.

2° caso: Sean dos triángulos ABC y A'B'C' tales que:

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ y } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{(Fig. 2-16)}$$

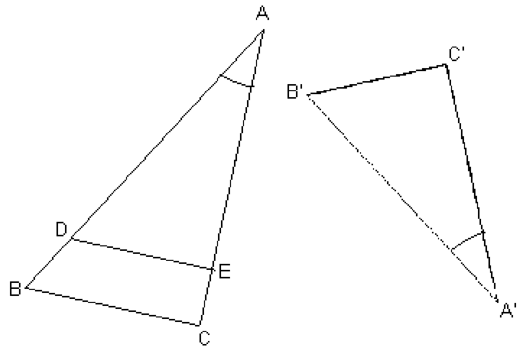


Fig. 2-16

Transladamos el triángulo A'B'C' de manera que coincida el ángulo $\hat{A}'$ con su igual $\hat{A}$. Sean D y E las posiciones respectivas de los vértices B' y C'. Como AD y AB son proporcionales a AE y AC, los lados DE y BC son paralelos y los dos triángulos son semejantes. El triángulo ABC es, pues, semejante al A'B'C' y:

Si dos triángulos tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, son semejantes. Por ejemplo: Dos triángulos isósceles que tengan igual el ángulo en el vértice, son semejantes.

3° caso: Sean dos triángulos ABC y A'B'C' (Fig. 2-17), tales que sus lados sean proporcionales. Por ejemplo:

A'B' es 2/3 de AB, A'C' es 2/3 de AC y B'C' es 2/3 de BC:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$$

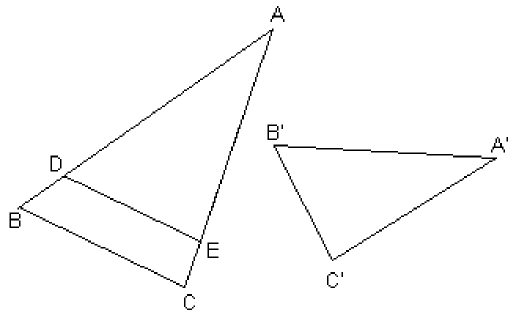


Fig. 2-17

Llevemos A'B' sobre AB y sea D la posición que toma B'. Tracemos por D la paralela a BC. Los triángulos ABC y ADE son, por consiguiente semejantes, y la razón de sus lados es igual a la razón de semejanza: $\frac{AD}{AB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{2}{3}$. Dicho de otro modo, los lados AD, AE y DE valen respectivamente 2/3 de AB, de AC y de BC. Los triángulos ADE y A'B'C' tienen sus lados iguales; luego los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente proporcionales, son semejantes.

Caso particular: triángulos rectángulos.

Sean dos triángulos ABC y A'B'C', rectángulos en A y A' (Fig. 2-18) tales que:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC} \qquad (2.2)$$

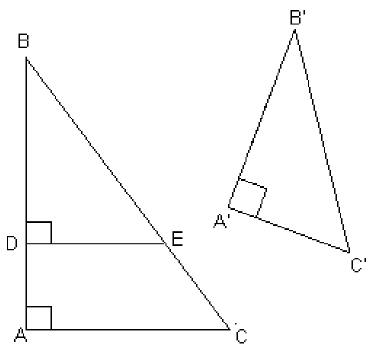


Fig. 2-18

Llevemos B'A' sobre BA y sea D la posición que toma A'. Tracemos por D la paralela a AC; los triángulos BDE y ABC son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC} \qquad (2.3)$$

Siendo iguales los primeros miembros de las igualdades (2.2) y (2.3) lo son también los segundos; luego BE = B'C'. Los triángulos DBE y A'B'C' tienen pues, la hipotenusa igual y un cateto igual; son iguales y por consiguiente ABC y A'B'C' son triángulos semejantes.

CONSECUENCIA: Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de sus catetos proporcionales, son semejantes.

2.6) Problemas de aplicación.

1) ¿Cuánto vale cada uno de los ángulos agudos de un triangulo rectángulo isósceles?

R = 45°

2) Un ángulo de un triángulo vale 64° y otro 32°. ¿Cuántos grados corresponden al tercer ángulo y como se llamará el triangulo en razón de sus ángulos?

R: Tercer ángulo = 84°; Triángulo acutángulo

3) ¿Cuánto valdrá cada uno de los ángulos adyacentes a la base de un triangulo isósceles, siendo el ángulo opuesto 5/6 de un ángulo recto?

R = 52°30´

4) ¿Cuál es el valor del ángulo opuesto a la base de un triangulo isósceles, siendo que uno de los de la base vale 71° 13´?

R = 37°34´

5) El perímetro de un triangulo equilátero es igual a 45 cm. ¿Qué longitud tendrá cada uno de sus lados?

R = 15 cm.

6) En el triángulo MNP, el ángulo $\hat{M}$ = 55° 23´ y el $\hat{N}$ = 81° 11´. Calcular el valor del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos dados. Corroborar el resultado gráficamente.

R = 111°43´

7) Calcular los valores de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ es el triple de $\hat{B}$ y $\hat{B}$ es el cuádruplo de $\hat{C}$.

R: $\hat{A}$ =127°3'31''13/17, $\hat{B}$ =42°31'10''10/17, $\hat{C}$ =10°35'17''11/17

8) ¿Es posible construir un triángulo isósceles tal que cada uno de sus lados iguales sea igual o menor que la mitad de la base?

R: No, por cuanto no se verifica b < a + c.

9) Calcular los valores de los ángulos, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ es el triple de $\hat{C}$ y $\hat{B}$ es igual a la sexta parte de $\hat{C}$.

R: $\hat{A}$=129°36'; $\hat{B}$=7°12'; $\hat{C}$=43°12'

10) Calcular los valores de los ángulos, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo, sabiendo que $\hat{A}$ es el quíntuplo de $\hat{B}$ y $\hat{B}$ el cuádruplo de $\hat{C}$.

R: $\hat{A}$=144°, $\hat{B}$=28°48', $\hat{C}$=7°12'

11) Se sabe que la suma de tres de los ángulos interiores de un trapezoide es igual a 277°31'. ¿Cuál es el valor del cuarto ángulo?

R: 82°29'

12) En un triángulo ABC se sabe que $\hat{A}$=75° y $\hat{B}$=35°. Calcular el valor del ángulo determinado por las alturas correspondientes a los lados *a* y *b*.

R:110°

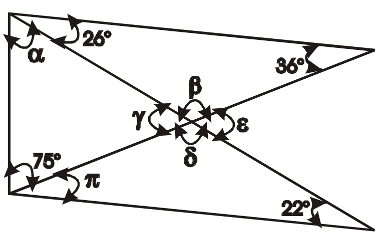
13) Calcular el valor de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{C}$ - $\hat{A}$ =44° y que $\hat{C}$ - $\hat{B}$ =25°.

R: $\hat{A}$=39°, $\hat{B}$=58° y $\hat{C}$=83°

14) Calcular el valor de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo sabiendo que $\hat{A}$ supera a $\hat{B}$ en 69° y $\hat{B}$ supera a $\hat{C}$ en 51°.

R: $\hat{A}$=123°; $\hat{B}$=54° y $\hat{C}$=3°

15) Calcular el valor de los ángulos, α, β, γ, δ, ε y π de la figura.



R: α = 43°, β = 118°

γ = 62°, δ = 118°

ε = 62° y π =40°

16) Indicar las conclusiones a las que se puede llegar acerca de la longitud de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo ABC, en cada uno de los siguientes supuestos:

$a)\hat{B} > \hat{A}$

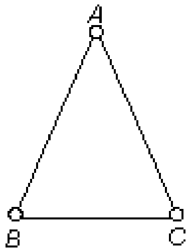
$b)\hat{B} < \hat{C}$

$c)\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$

$d)\hat{A} > \hat{C}$

$e)\hat{B} \geq \hat{C}, \hat{A} \leq \hat{C}$

$f)\hat{B} > \hat{A}, \hat{B} \geq \hat{C}$



$\mathrm{Re}\,spuesta:$

$a)\overline{AC} > \overline{BC}$

$b)\overline{AC} < \overline{AB}$

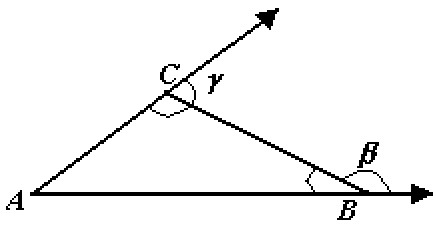
$c)\overline{BC} > \overline{AC} > \overline{AB}$

$d)\overline{BC} > \overline{AB}$

$e)\overline{AC} \geq \overline{AB} \geq \overline{BC}$

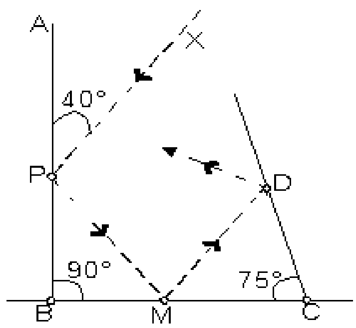
$f)\overline{BC} < \overline{AC} \leq \overline{AB}$

17) Dada la figura, con β=145° y $\hat{C} = 101°$, establecer el valor de los ángulos $\hat{A}$ y γ. Además, determinar cuál es el lado de mayor tamaño del triángulo ABC.



R: $\hat{A}$=44° , γ =79°, $\overrightarrow{AB}$

18) Cuando un rayo de luz se refleja sobre una superficie lisa, el ángulo entre el rayo incidente $\overrightarrow{XP}$ y la superficie AB es igual al ángulo entre el rayo reflejado $\overrightarrow{PM}$ y la superficie.



En la figura, $\hat{B}$= 90°, $\hat{C}$=75° y el rayo de luz forma un ángulo de 40° con AB. Completar la trayectoria del rayo de luz cuando se refleja sobre BC, sobre DC y de nuevo sobre AB. ¿Según qué ángulo se refleja sobre AB el rayo de luz la segunda vez?

R: 70°

19) Dadas las dos bases B y b de un trapecio y su altura h, calcular las alturas de los dos triángulos obtenidos prolongando los lados no paralelos del trapecio hasta su punto de coincidencia. Utilice los siguientes datos: B = 40m; b = 24m y h = 20m.

R: 100/3 m

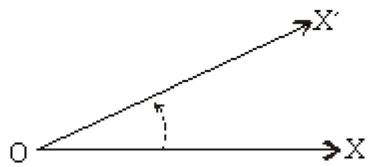
Tema 3: TRIGONOMETRÍA.

3.1) Generación de los ángulos.

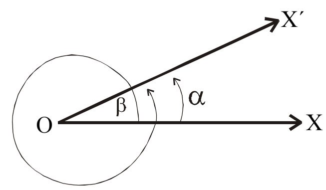
Si bien en el capítulo 2 ya hemos trabajado con ángulos, en este capítulo estudiaremos su definición y sus sistemas de medida.

Los ángulos se consideran como engendrados por una semirrecta móvil al girar alrededor del origen. Es decir, un ángulo es una medida de rotación.

Así por ejemplo, si la semirrecta OX gira alrededor del origen O, al pasar de la posición inicial a otra posición OX´, describe el ángulo XOX´, (Fig. 3-1-a) pudiendo dar vueltas completas alrededor del origen (Fig. 3-1-b).



a)



b)

Fig. 3-1

3.1.1) Signo de los ángulos.

El ángulo puede engendrarse de dos maneras o sentidos. En la figura 3-1-a, unos de esos sentidos es el indicado por la flecha, el otro es el contrario.

Por convención se adopta como positivo el que es contrario al movimiento de las agujas del reloj.

En consecuencia, el ángulo en trigonometría puede tener un valor positivo o negativo. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{\gamma = 1.028°}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = -\ 798°}$$

3.1.2) Medida de los ángulos.

Recordemos que medir un ángulo es compararlo con otro ángulo que se toma como unidad, o bien, es la razón entre el ángulo dado y la unidad elegida.

Consideremos dos sistemas para medir ángulos en un plano: los sistemas sexagesimal y circular. El sistema sexagesimal es el más empleado, utilizándose con preferencia el circular en los planteos de carácter teórico.

3.1.2.1) Sistema sexagesimal.

Se llama *ángulo de un grado* a la trescientos sesenta ava parte de un giro completo. Sus submúltiplos son el ángulo de un minuto y el de un segundo.

Grado, minuto y segundo no son unidades sino nombres para identificar las particiones de un ángulo.

$$ángulo\ \ 1° = \frac{giro\ \ completo}{360}$$
$$ángulo\ \ 1' = \frac{ángulo\ \ 1°}{60}$$
$$ángulo\ \ 1'' = \frac{ángulo\ \ 1'}{60}$$

De acuerdo a lo anterior se tiene:

1 ángulo recto = 90°

1 ángulo llano = 180°

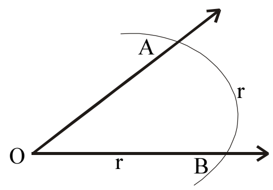
1 ángulo de un giro completo = 360°

La conveniencia de dar al giro completo el valor 360, radica en la gran divisibilidad de dicho número que, al dividirse por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y múltiplos de éstos, las divisiones dan números enteros. Ello permite el manejo de los ángulos más característicos a través de números de fácil operación y retención mental, por ej.: 30°, 60°, 45°, 90°, 180°. Lo mismo ocurre con la partición del grado en 60 minutos y del minuto en 60 segundos.

3.1.2.2.) Sistema circular.

El ángulo central correspondiente a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia recibe el nombre de *ángulo de un radian*

Un ángulo es de un radián si la longitud del arco AB es igual a la longitud del radio OB



Luego; *ángulo = arco dividido el radio.* $\theta = \frac{AB}{r}$

Considerando una circunferencia como un arco cuyo ángulo central es de 360° y teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia rectificada se expresa por la formula C = 2πr, es decir, 6,2832 radios, se tiene que, a un ángulo de 360° corresponden 6,2832 radianes. Tal como en el caso del grado, el radián no constituye una unidad de medida sino que es simplemente un nombre para identificar que un determinado número es la magnitud de un ángulo.

Es decir:

$$360° = 2\ \pi\pi\ \ radianes$$

Por lo tanto:

$$180° = \pi \ radianes$$

y:

$$90° = \frac{\pi}{2} \ \ radianes$$

En este sistema, los ángulos resultan representados en general por números reales (es decir decimales), algunos incluso irracionales como el número π o sus múltiplos y submúltiplos. De allí la inconveniencia del sistema circular como sistema práctico de medida de ángulos.

3.1.2.3) Conversión del sistema sexagesimal al circular y viceversa.

I) *Expresar grados sexagesimales en radianes.*

Sabemos que:

un ángulo de 360° equivale a 2π radianes

Luego:

un ángulo de 1° equivale a $\frac{2\pi}{360}$ radianes

un ángulo α° equivale a $\frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$ radianes

Por lo tanto, un ángulo α° expresado en radianes (α_r) es:

$$\alpha_r = \frac{\pi\alpha°}{180°} \ \ radianes \qquad (3.1)$$

Es decir, para reducir un ángulo expresado en grados sexagesimales a radianes basta multiplicar dicha cantidad por el número π y dividir el resultado por 180.

Ejemplos

1°) *Expresar en radianes el ángulo de :*

a) 30°

Teniendo en cuenta la ecuación (3.1) y que el ángulo α es igual a 30°, se tiene:

$$\alpha_r = \frac{\pi\,30°}{180°} radianes = \frac{\pi}{6} radianes$$

b) 60°

Resulta: $\alpha_r = \frac{\pi \ \ 60°}{180°} radianes = \frac{\pi}{3} \ \ radianes$

c) 120°

Resulta: $\alpha_r = \dfrac{\pi\ 120°}{180°} radianes = \dfrac{2}{3}\pi\ \ radianes$

d) 210°

Resulta: $\alpha_r = \dfrac{\pi\ 210°}{180°} radianes = \dfrac{7}{6}\pi\ \ radianes$

2°) *Expresar en radianes el ángulo de 24° 10´ 14´´*

Vamos a reducir los minutos y segundos a fracción de grado.

$$\alpha = 24°10'14'' = 24° + \left(\frac{10}{60}\right)^{o} + \left(\frac{14}{60.60}\right)^{o}$$

$$\alpha = 24° + 0{,}167 + 0{,}0039 = 24{,}1709$$

Luego:

$$\alpha_r \cong \frac{\pi\ \ 24{,}1709}{180°} = 0{,}4219\ \ radianes$$

3°) *Expresar radianes en grados sexagesimales.*

Despejando $\alpha°$, de la formula (3.1):

$$\boxed{\alpha° = \frac{180°\,\alpha_r}{\pi}} \qquad (3.2)$$

Es decir, para expresar en grados, minutos y segundos un ángulo dado en radianes basta multiplicar esta cantidad por 180° y dividir el resultado por el numero π.

<u>OBSERVACIÓN:</u> Las formulas de transformación (3.1) y (3.2) pueden reducirse a la formula única:

$$\boxed{180°\ \ \alpha_r = \pi\,\alpha°} \qquad (3.3)$$

Para obtener luego las formulas (3.1) o (3.2) bastará despejar α_r o $\alpha°$, respectivamente, de la ecuación (3.3).

3.1.3) Problemas de aplicación.

Convierta cada ángulo de grado a radianes y exprese su respuesta en forma decimal redondeando en dos decimales.

1. α = 32° R: 0,56 radianes
2. β = 42° 58´ R: 0,75 radianes
3. γ = 60° 14´ R: 1,05 radianes
4. δ = 16° 15´ 20´´ R: 0,28 radianes
5. ε = 50° R: 0,87 radianes
6. φ = 20° R: 0,35 radianes

Convierta cada ángulo de radianes a grados:

1. α = 8,24 R: 472° 24´ 09´´
2. β = 0,75 R: 42° 58´
3. γ = 4 R: 229° 10´
4. δ = 0,37 R: 21° 11´ 58´´
5. ε = 0,57 R: 32° 39´ 31´´
6. φ = 5 R: 286° 28´ 44´´

3.2) Funciones trigonométricas o goniométricas.

Consideremos un ángulo agudo cuyo vértice sea O (Fig. 3-2-a) y sobre uno de sus lados, $\overline{OQ}$ levantemos perpendiculares tales como AB, A'B', A''B'', formándose una serie de triángulos rectángulos, OAB, OA'B', OA''B'', que son semejantes por tener dos ángulos iguales: el ángulo en O por común y el recto; luego, como los lados homogéneos serán proporcionales resulta que se pueden establecer varias razones iguales entre los catetos opuestos o adyacentes al ángulo O y las hipotenusas correspondientes.

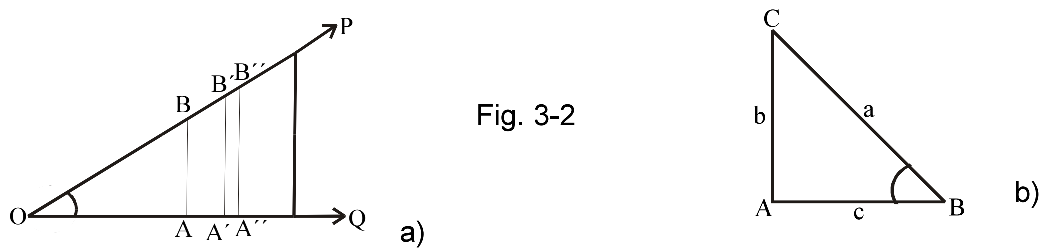


Fig. 3-2

Veamos algunas de dichas relaciones;

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OA''} = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ \hat{O}}{cateto\ \ adyacente\ \ \hat{O}} = cons\tan te$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A''B''}{OB''} = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ \hat{O}}{hipotenusa} = cons\tan te$$

Por la semejanza de los triángulos, la razón entre un lado y otro en cada triángulo es un número sin dimensión (adimensional), constante, que es independiente de las dimensiones de los lados del triángulo y dependiente unicamente del valor del ángulo.

Funciones trigonométricas o goniométricas son los números adimensionales que se obtienen al calcular las razones entre los pares de lados de un triángulo rectángulo.

Estas funciones trigonométricas toman nombres particulares de acuerdo con las siguientes definiciones:

3.2.1) Seno de un ángulo agudo.

Se llama seno de un ángulo de un triangulo rectángulo a la razón entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa (figura 3-2-b).

$$sen\,\hat{B} = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

3.2.2) Coseno de un ángulo agudo.

Se llama coseno de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo a la razón entre el cateto adyacente a dicho ángulo y la hipotenusa.

$$cos\,\hat{B} = \frac{cateto\ \ adyacente\ \ al\ \ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$cos\,\hat{C} = \frac{cateto\ \ adyacente\ \ al\ \ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

3.2.3) Tangente de un ángulo agudo.

Se llama tangente de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo, a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a dicho ángulo.

$$tg\ \ \hat{B} = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{B}}{cateto\ \ adyacente\ \ \hat{B}} = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \ \hat{C} = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{C}}{cateto\ \ adyacente\ \ \hat{C}} = \frac{c}{b}$$

3.2.4) Cotangente de un ángulo agudo.

Se llama cotangente de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo, a la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto a dicho ángulo.

$$cotg\ \hat{B} = \frac{cateto\ \ adyacente\ \ \hat{B}}{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{B}} = \frac{c}{b}$$

$$cotg\ \hat{C} = \frac{cateto\ \ adyacente\ \ \hat{C}}{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{C}} = \frac{b}{c}$$

3.2.5) Secante de un ángulo agudo.

Se llama secante de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo, a la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente a dicho ángulo.

$$sec\ \ \hat{B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente\ \ al\ \ \hat{B}} = \frac{a}{c}$$

$$sec\ \ \hat{C} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente\ \ al\ \ \hat{C}} = \frac{a}{b}$$

3.2.6) Cosecante de un ángulo agudo.

Se llama cosecante de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo, a la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto a dicho ángulo.

$$cosec\ \hat{B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{B}} = \frac{a}{b}$$

$$cosec\ \hat{C} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto\ \ al\ \ \hat{C}} = \frac{a}{c}$$

Obsérvese que cotangente, secante y cosecante son las razones inversas a tangente, coseno y seno, respectivamente.

3.3) Funciones en la circunferencia trigonométrica.

Consideremos un ángulo variable α y sea OX´ una semirrecta que corta la circunferencia trigonométrica, de centro O en el punto M (ver figura 3-3). Desde este punto se traza el segmento MN perpendicular al eje X, obteniéndose los segmentos:

ON = x, que llamaremos *abscisa*

NM = y, que llamaremos *ordenada*

OM = r, que llamaremos *radio vector*

Obsérvese que al girar la recta OX, para cada punto de la circunferencia varía α y varía también la abscisa y la ordenada, no así el radio vector.

Con la *abscisa*, la *ordenada* y el *radio vector* se pueden formar seis razones:

$$\frac{y}{r},\frac{x}{r},\frac{y}{x},\frac{x}{y},\frac{r}{x},\frac{r}{y}$$

análogas a las que obteníamos al definir el seno, el coseno, la tangente, etc., de un ángulo agudo.

En consecuencia, aceptamos por definición que:

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada}{radio\ vector} = \frac{y}{r}$$

$$cos\,\alpha = \frac{abscisa}{radio\ vector} = \frac{x}{r}$$

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

$$sec\,\alpha = \frac{radio\ vector}{abscisa} = \frac{r}{x}$$

$$cosec\,\alpha = \frac{radio\ vector}{ordenada} = \frac{r}{y}$$

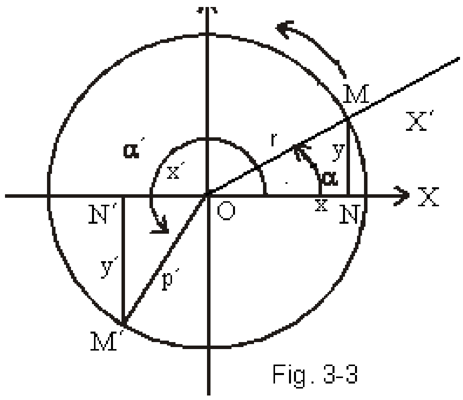


Fig. 3-3

En cuanto a los signos de *x, y,* y *r* se acepta la siguiente convención: e*l radio vector, que es constante, será siempre positivo.* La *abscisa* y la *ordenada* que son variables, serán *positivas o negativas* según tengan igual o distinto sentido que la abscisa y la ordenada que corresponden a un ángulo del primer cuadrante, las que supondremos siempre positivas.

3.3.1) Signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

Fijada la posición de un ángulo y determinados el radio vector, la abscisa y la ordenada correspondiente, éstas pueden ser positivas o negativas según el cuadrante en el que se encuentre el radio vector. Claro está que el radio vector es siempre positivo por convención y por lo tanto, los signos de las funciones trigonométricas dependerán exclusivamente del signo de la abscisa y de la ordenada correspondiente. En efecto: el seno, por ejemplo, está definido por una razón en la que el consecuente es el radio vector, siempre positivo, por ello su signo es el del antecedente, es decir el de la ordenada.

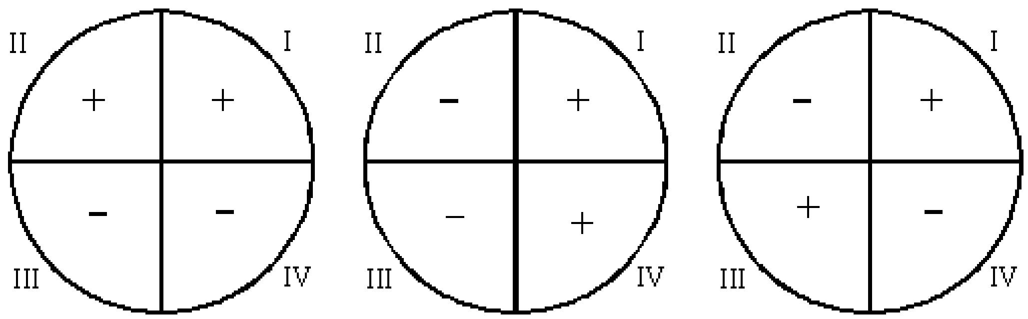
<u>Regla de signos para las funciones trigonométricas</u>

1. *El signo del seno y cosecante es el mismo que el de la ordenada.*

2. *El signo del coseno y secante es el mismo que el de la abscisa.*

3. *La tangente y la cotangente son positivas cuando la ordenada y la abscisa tienen el mismo signo y son negativas en caso contrario.*

Para recordar presentemos estos gráficos:



a) seno y cosecante *b) coseno y secante* *c) tangente y cotangente*

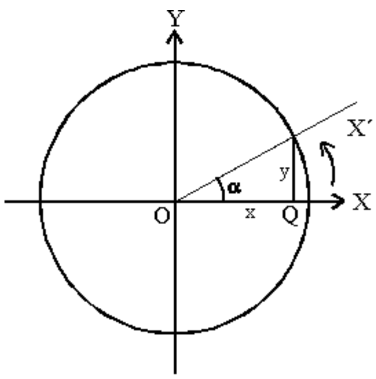
Fig. 3-4

3.4) Relaciones entre las funciones trigonométricas.

3.4.1) Formulas fundamentales.

TEOREMA: La suma de los cuadrados del seno y del coseno de un mismo ángulo es igual a la unidad.

Consideremos un ángulo cualquiera α



$$sen\,\alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow sen^2\alpha = \frac{y^2}{r^2}$$

$$cos\,\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{x^2}{r^2}$$

Fig. 3-5

Sumando miembro a miembro estas igualdades, resulta;

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

Pero, por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo O P Q,

$$y^2 + x^2 = r^2$$

luego:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1} \qquad (3.4)$$

<u>COROLARIOS:</u> Esta igualdad, llamada también *Relación Pitagórica* nos permite calcular el seno en función del coseno, o bien el coseno en función del seno.

En efecto, de la ecuación (3.4):

$$sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

o bien

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$\cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

3.4.2) Relación entre la tangente, el seno y el coseno.

Sabemos que

$$sen\ \alpha = \frac{y}{r}$$

y que

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{y}{r}\ \frac{r}{x}$$

Luego

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{y}{x} \qquad (3.5)$$

Pero, por definición de tangente se sabe que

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} \qquad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) se deduce

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}} \qquad (3.7)$$

Luego, la tangente de un ángulo es igual al cociente entre el seno y el coseno de dicho ángulo.

3.4.3) Relación entre la cotangente, el seno y el coseno.

Sabemos que

$$cos\ \alpha = \frac{x}{r}$$

$$sen\ \alpha = \frac{y}{r}$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{x}{r}\ \frac{r}{y}$$

O bien

$$\frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{x}{y} \qquad (3.8)$$

Pero por la definición de cotangente se sabe que

$$\cot g\ \alpha = \frac{x}{y} \qquad (3.9)$$

De (3.8) y (3.9) se establece que

$$\boxed{cotg\ \alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}} \qquad (3.10)$$

Es decir, *la cotangente de un ángulo es igual al cociente del coseno y el seno de dicho ángulo.*

Vale decir, *que la cotangente de un ángulo es igual a la inversa de la tangente del mismo y recíprocamente*, es decir:

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \qquad (3.11) \qquad \text{y} \qquad tg\ \alpha = \frac{1}{cotg\ \alpha} \qquad (3.12)$$

3.4.4) Relación entre el coseno y la secante.

Por definición

$$cos\ \alpha = \frac{x}{r}$$

$$sec\ \alpha = \frac{r}{x}$$

entonces: $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$ (3.13) y $cos\ \alpha = \dfrac{1}{sec\ \alpha}$ (3.14)

es decir que *el coseno de un ángulo es igual a la inversa de la secante del mismo y recíprocamente*

3.4.5) Relación entre la cosecante y el seno.

Análogamente, puede deducirse que

$sen\ \alpha = \dfrac{1}{cosec\ \alpha}$ (3.15) y $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$ (3.16)

La cosecante de un ángulo es igual a la inversa de su seno y recíprocamente.

3.4.6) Recapitulación.

Las relaciones entre las funciones trigonométricas que se han establecido reciben el nombre de *fórmulas fundamentales* y vamos a consignar a continuación las principales:

1) $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

3) $cotg\ \alpha = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

4) $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$

5) $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$

3.5) Representación geométrica de las funciones trigonométricas a través de segmentos.

Consideremos un arco AM (fig. 3-6), perteneciente a una circunferencia trigonométrica de centro O y radio *r*, unidad, y sea α el ángulo central correspondiente.

El punto A se llama *origen del arco*; el radio OM, radio vector, y el punto M se llama *extremo libre* del arco α.

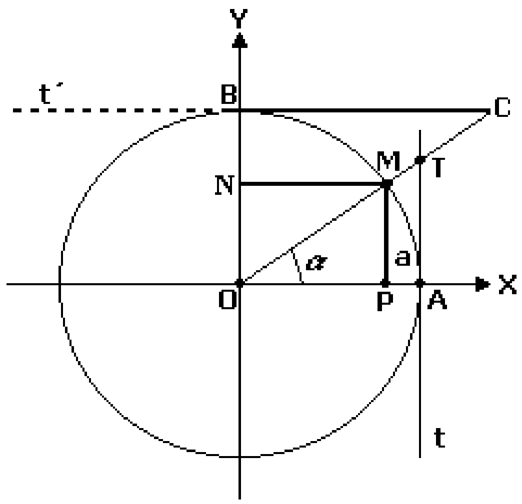


Fig. 3-6

Dibujemos MP $\perp$ a OA, luego por definición:

$$sen\, \alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{\overline{OM}}} = \frac{\overline{PM}}{r} = medida\ \overline{PM}$$

$$cos\, \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{\overline{OM}}} = \frac{\overline{OP}}{r} = medida\ \overline{OP}$$

En consecuencia:

El seno de un ángulo es la medida, respecto al radio (que es la unidad), del segmento perpendicular al eje de las abscisas trazado desde el extremo libre.

El coseno de un ángulo es la medida, con respecto al radio, del segmento del eje de las abscisas, comprendido entre el centro y el pie de la perpendicular a dicho eje trazada por el extremo libre.

Tracemos ahora las tangentes a la circunferencia por los puntos A y B; a la tangente geométrica t, trazada por el punto A, la llamaremos *eje de las tangentes*, y a la t´, trazada por el punto B, *eje de las cotangentes*. Prolonguemos el radio vector que pasa por el extremo libre hasta cortar a esas tangentes en los puntos T y C, respectivamente.

Por definición y por semejanza de triángulos se tiene:

$$tg\, \alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{\overline{OP}}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{\overline{AT}}{r} = medida\ \overline{AT}$$

$$cotg\ \ \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{\overline{PM}}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{\overline{ON}}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{BC}}{r} = medida\ \overline{BC}$$

Por lo tanto:

La *tangente de un ángulo* es la medida, respecto al radio, del segmento de *eje de las tangentes*, comprendido entre el extremo A y la prolongación del radio vector que pasa por el extremo libre del arco a.

La *cotangente de un ángulo* es la medida, respecto al radio, del segmento de *eje de las cotangentes* comprendido entre el punto B y la prolongación del radio vector que pasa por el extremo libre del arco dado.

$$sec\ \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OT}}{r} = medida\ \overline{OT}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{r} = medida\ \overline{OC}$$

Luego:

La secante de un ángulo es la medida, respecto al radio, del segmento del radio vector comprendido entre el centro y el eje de las tangentes.

La cosecante de un ángulo es la medida, respecto al radio, del segmento del radio vector comprendido entre el centro y el eje de las cotangentes.

En resumen, los segmentos PM, OP, AT, BC, OT Y OC son las representaciones geométricas del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo, respectivamente. No obstante, entiéndase bien, las medidas de dichos segmentos, respecto al radio, son los valores de las funciones trigonométricas.

3.6) Variaciones de las funciones trigonométricas.

3.6.1) Variaciones del seno.

En una circunferencia trigonométrica de centro O consideremos un ángulo variable, α. La medida del segmento PM, varía en el primer cuadrante, desde 0 hasta 1 (medida del radio); en el segundo cuadrante desde 1 hasta 0; siempre de una manera continua, es decir, pasando por todos los valores intermedios. Esto es:

$$\begin{array}{l} \text{sen } 0° = 0 \\ \quad \} \text{ Valor sen } \alpha \text{ crece al pasar } \alpha \text{ de } 0° \text{ a } 90°. \\ \text{sen } 90° = +1 \\ \quad \} \text{ Valor sen } \alpha \text{ decrece al pasar } \alpha \text{ de } 90° \text{ a } 180°. \\ \text{sen } 180° = 0 \\ \quad \} \text{ Valor sen } \alpha \text{ decrece al pasar } \alpha \text{ de } 180° \text{ a } 270°. \\ \text{sen } 270° = -1 \\ \quad \} \text{ Valor sen } \alpha \text{ crece al pasar } \alpha \text{ de } 270° \text{ a } 360°. \\ \text{sen } 360° = 0 \end{array}$$

Puesto que el valor del seno de α está dado por la medida del segmento PM con respecto al radio, puede comprobarse nuevamente, ahora de la Fig. 3-6, que el signo es positivo en el 1° y 2° cuadrante y negativo en el 3° y 4°. En consecuencia, el valor máximo del seno es +1 y el mínimo –1.

Cuando el ángulo α sobrepasa los 360°, el punto M pasará de nuevo en el mismo orden, por todas las posiciones anteriores y por lo tanto los valores del seno se repetirán cada 360° , por lo que se dice que la función seno es periódica y que su período es de 360°.

Representación grafica de la función y = sen α

Vamos a representar gráficamente la función $y = sen\ \alpha$ para poner en evidencia la variación del seno.

Para ello dibujemos una circunferencia trigonométrica que dividiremos de 30° en 30° (12 partes iguales); a su derecha prolongamos el eje de las x; del cual tomaremos una longitud igual a la circunferencia rectificada (es decir su perímetro), dividida en 12 partes iguales, representativas de las partes en que se dividió a la primera. Por los puntos 1,2,3, etc., trazamos paralelas al eje x hasta las perpendiculares al eje x trazadas por los puntos correspondientes (para el 1, 30°; para el 2, 60°, etc.). Luego, se unen los puntos establecidos con un trazo continuo, la curva que se origina recibe el nombre de *sinusoide* o *senoide* (figura 3-7).

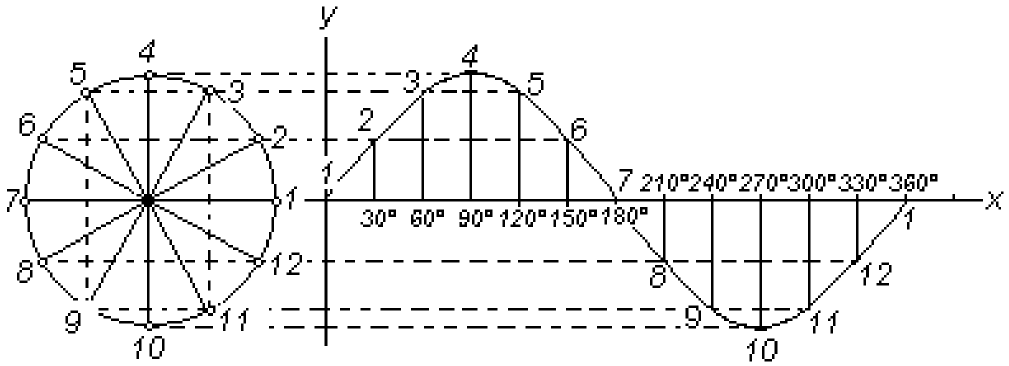


Fig. 3-7

3.6.2) Variaciones del coseno.

Consideremos un ángulo α variable, referido a una circunferencia trigonometrica de centro O.

Al variar α de 0° a 360°, la medida del segmento OP (figura 3-6) variará de la siguiente manera:

En el primer cuadrante, desde 1 (medida del radio) hasta 0; en el segundo cuadrante, desde 0 hasta –1; en el tercer cuadrante, desde –1 hasta 0, y en el cuarto cuadrante, desde 0 hasta 1. Claro está que esta variación del coseno se efectúa en forma continua pasando por todos los valores intermedios.

Dado que el valor del coseno de α es la medida del segmento OP, con respecto al radio, puede comprobarse, observando la figura 3-6, que el signo es positivo en el primer cuadrante y en el cuarto, y negativo en el segundo cuadrante y en el tercero.

La variación del coseno es, pues:

cos 0° = 1,	*decrece hasta 90°*
cos 90° = 0,	*decrece hasta 180°*
cos 180° = -1,	*crece hasta 270°*

cos 270º = 0, *crece hasta 360º*

cos 360º = 1

El valor máximo del coseno es (+1) y el valor mínimo, (-1).

Los valores del coseno se repiten en el mismo orden después de los 360°. Es decir, *la función coseno es periódica*, siendo su periodo 360°.

Representación grafica de la función y = cos α

Se obtiene la curva representativa de la función procediendo como en el caso del seno.

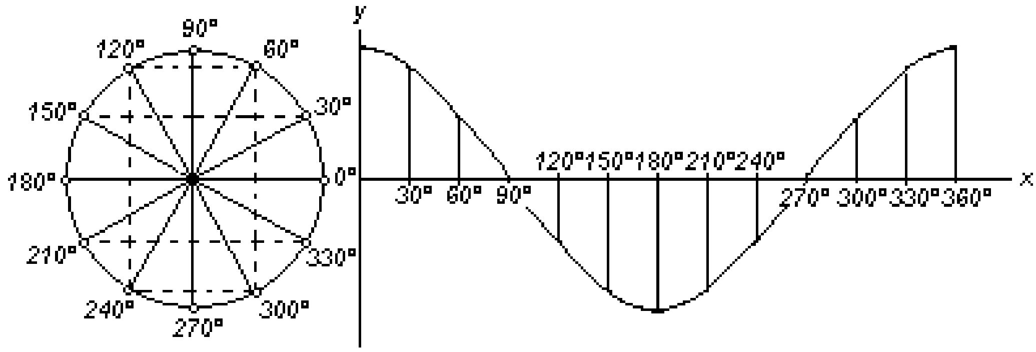


Fig. 3-8

Las diferentes medidas del coseno se llevan sobre las perpendiculares al eje de las abscisas. La curva obtenida recibe el nombre de *cosinusoide* o *cosenoide* (figura 3-8), la curva adquiere la misma forma a partir de los 360° (periodo).

Se observa, además, que la *cosinusoide* es la misma sinusoide desplazada (o desfasada) 90°.

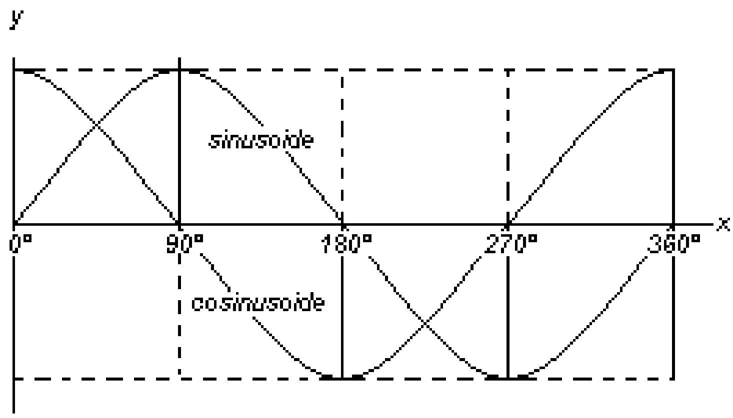


Fig. 3-9

OBSERVACIÓN:: Las curvas *sinusoide* y *cosinusoide* son representaciones graficas de fenómenos oscilatorios denominados armónicos (ver ítem 3.7.1).

3.6.3) Variaciones de la tangente.

Supongamos un ángulo α, variable, referido a una circunferencia trigonométrica de centro O. Sabemos que el valor de la tangente esta dado por la medida del segmento AT (ver figura 3-6), con respecto al radio, variando del siguiente modo:

En el primer cuadrante desde 0 hasta ∞; en el segundo de $-\infty$ a 0; en el tercero de 0 a ∞; y en el cuarto de $-\infty$ a 0. Observando la figura 3-6 se comprueba que el signo de la tangente es positivo en el primer y tercer cuadrante y negativo en los restantes.

Conviene hacer notar la *discontinuidad* de los valores de la tangente. En efecto, al variar un ángulo desde 0° a 90°, la tangente pasa de 0 a $+\infty$; de 90° a 180°, pasa de $-\infty$ a 0; de 180° a 270°, pasa de 0 a $+\infty$; 270° a 360°, pasa de $-\infty$ a 0. Es decir que la tangente pasa bruscamente de $+\infty$ a $-\infty$ en los 90° y en los 270°.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 0° = 0 \\ tg\ (90°- \in) \to +\infty \\ \end{array}\right\} \textit{El valor de } tg\ \alpha \textit{ crece al pasar de } 0° \textit{ a } (90°- \in)\ (*)$$

(*) $\in$ es un ángulo que se supone muy pequeño.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ (90°+ \in) \to -\infty \\ tg\ 180° = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ (270°- \in) \to \infty \\ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ (270°+ \in) \to -\infty \\ tg\ 360° = 0 \end{array}\right\}$$

Representación grafica de la función $y = tg\ \alpha$

La imagen geométrica de la variación de los valores de la tangente se obtiene proyectando los puntos como el T de la figura 3-6, sobre las perpendiculares trazadas al eje x por los puntos representativos de los ángulos de 0°, 30°, 60°, etc. en que se ha dividido la circunferencia trigonométrica. La curva obtenida se llama *tangetoide*, en donde se observa no solo la discontinuidad de la tangente en los 90° y en los 270°, sino también que el periodo es igual a 180° (figura 3-10).

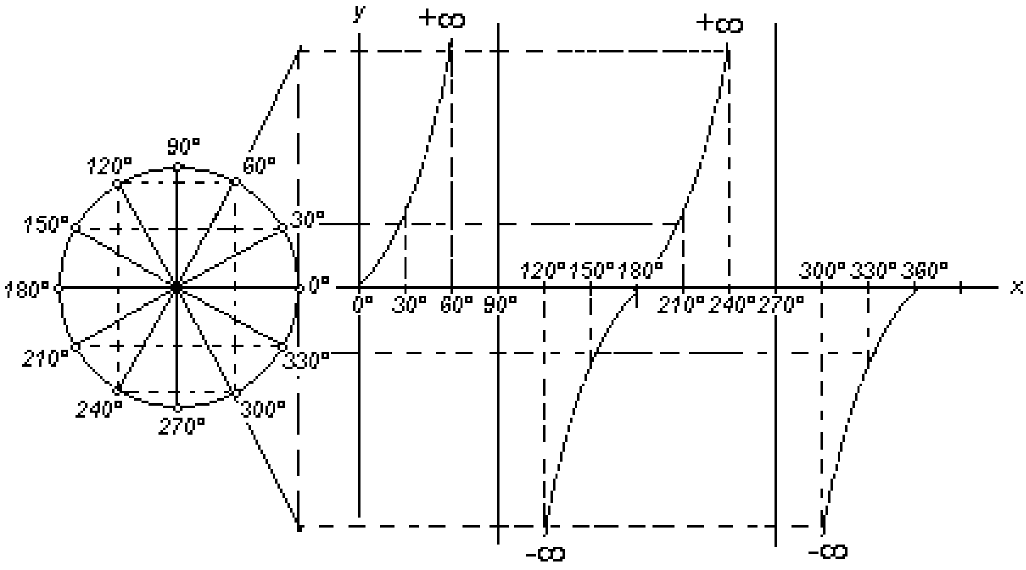


Fig. 3-10

3.6.4) Variaciones de la cotangente, secante y cosecante.

Para efectuar un estudio de las variaciones de las cotangentes, secantes y cosecantes se procede como con la tangente, el coseno y el seno.

La imagen geométrica de la variación de los valores de la cotangente recibe el nombre de *cotangentoide*. Como la representación de la tangente, es una curva discontinua, siendo su período de 180° (figura 3-11).

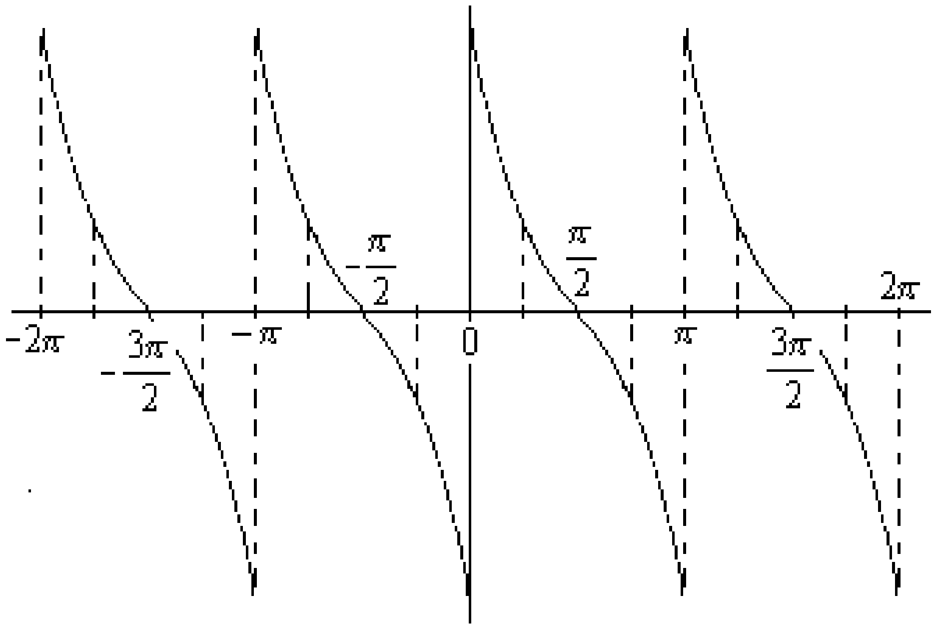


Fig. 3-11

También son discontinuas las curvas de la secante (*secantoide*) y de la cosecante (cosecantoide), como se puede apreciar en las graficas correspondientes (figuras 3-12 y 3-13 respectivamente). Obsérvese que en ellas no existen valores menores que +1 cuando es (+) y al mismo tiempo mayores que –1 cuando es (-). El *período* de las mismas es 2 π.

Representación de la secante

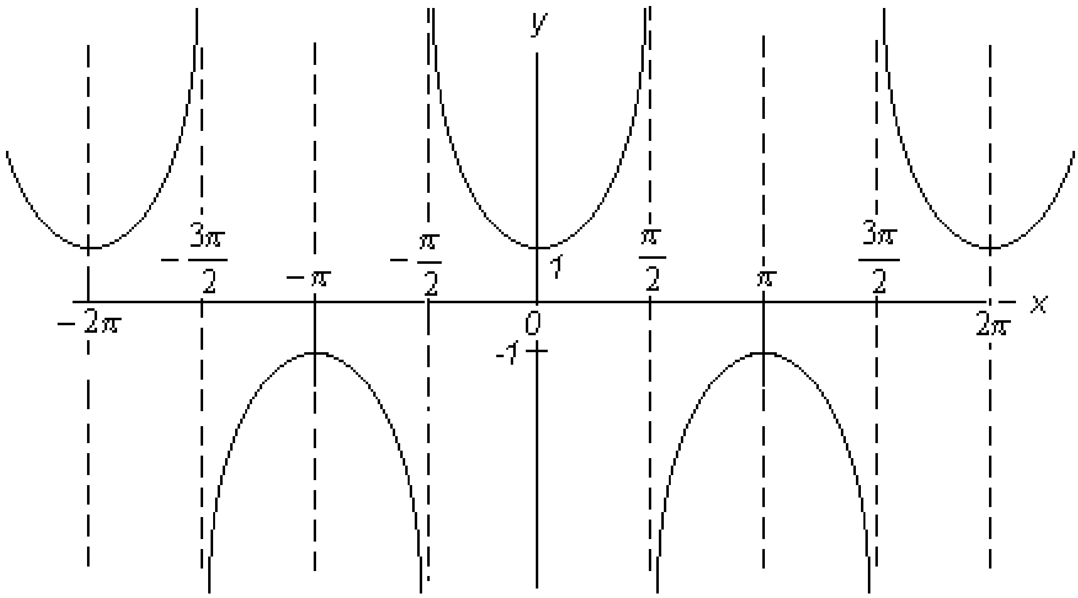


Fig. 3-12

Representación de la cosecante

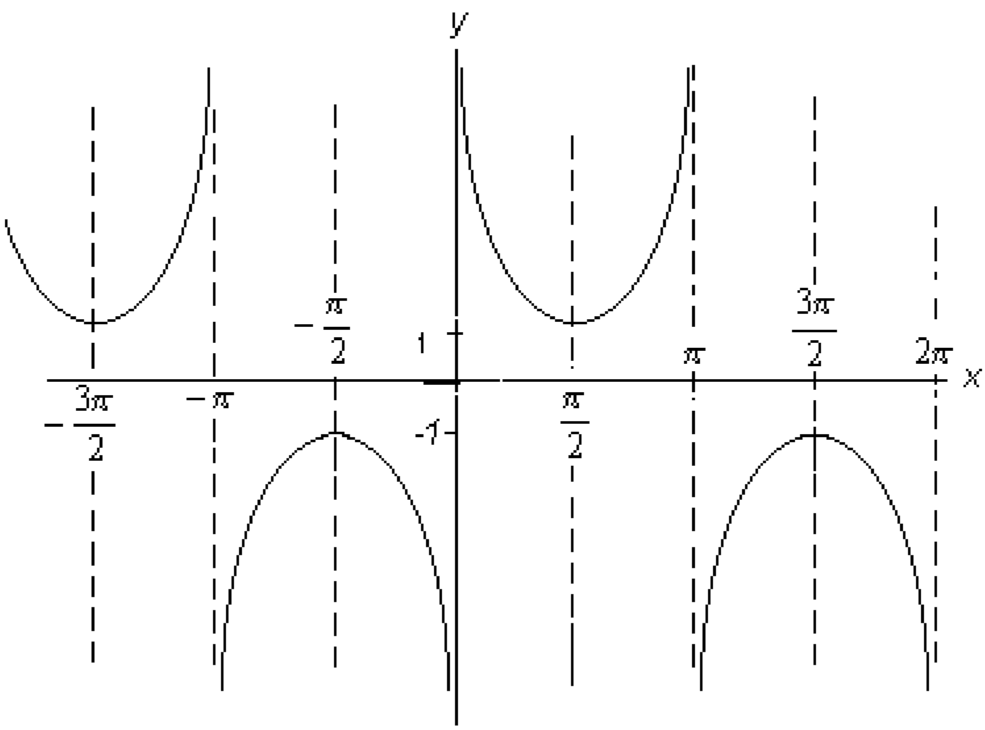


Fig. 3-13

3.7) Aplicaciones en física.

3.7.1) Movimiento oscilatorio armónico.

Se dice que el movimiento de un cuerpo es oscilatorio cuando efectúa desplazamientos en uno y otro sentido alrededor de cierto punto fijo. En este caso el estudio se realiza para un tipo especial de movimiento oscilatorio denominado movimiento oscilatorio armónico.

Movimientos aproximados de esta clase son: el de un cuerpo unido a un resorte, el de un péndulo oscilando con amplitud pequeña y el movimiento de un pistón de motor de automóvil entre otros.

En cualquier tipo de movimiento ondulatorio (ondas mecánicas) las partículas del medio en el cual se proponga la onda oscilan con movimientos armónicos o con una superposición de tales movimientos. Esto se cumple también para las ondas electromagnéticas en el vacío, salvo que, en lugar de partículas materiales, las magnitudes que oscilan son los campos eléctrico y magnético asociados con la onda.

Como ejemplo final, las ecuaciones que describen el comportamiento de un circuito electrónico por el que circula una corriente alterna tiene igual forma que las del movimiento armónico de un cuerpo material.

Puede verse así que el análisis del movimiento armónico sirve de base para un estudio posterior en diferentes campos de la física.

Las ecuaciones del movimiento armónico simple son susceptibles de la siguiente interpretación geométrica:

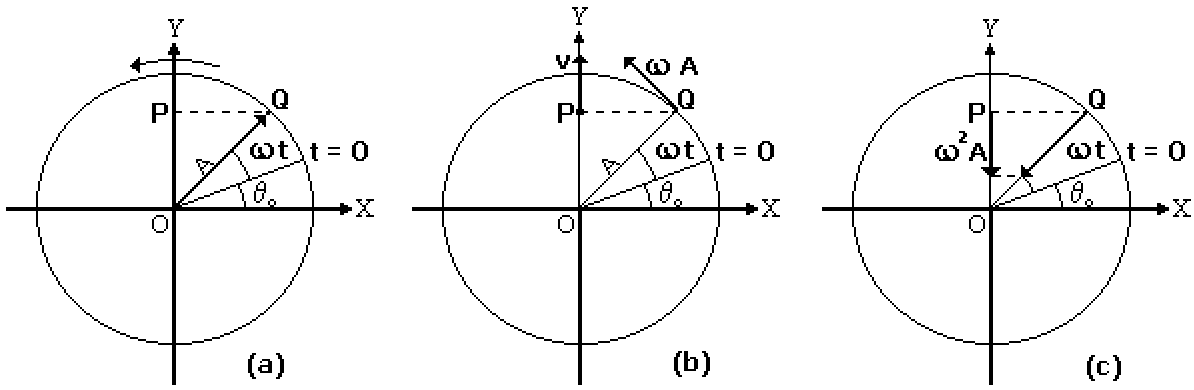


Fig. 3-14

Hagamos girar el segmento **OQ** de longitud igual a la amplitud de oscilación A, alrededor del punto fijo 0 con velocidad angular ω.

En el instante t = 0 el segmento OQ formará con el eje horizontal un ángulo igual a la fase inicial θ_0. El punto P es la proyección de Q sobre el eje vertical y cuando gira OQ, el punto P oscila a lo largo de dicho eje.

Representemos por *y* el valor de la elongación o sea la longitud OP. En un instante cualquiera t, el ángulo formado por el radio OQ y el eje horizontal es igual a la fase [$\omega t + \theta_0$] y se tiene (fig. 3-14-a):

$$y = A \ sen(\omega t + \theta_0) \qquad (3.17)$$

La velocidad del punto Q es ωA y su componente vertical, igual a la velocidad de P, es (Fig. 3-14-b)

$$v = \omega A \ cos(\omega t + \theta_0) \qquad (3.18)$$

La aceleración de Q es su aceleración normal $\omega^2 A$ y su componente vertical, igual a la aceleración de P, es

$$a = -\omega^2 A \ sen(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 y \qquad (3.19)$$

El significado del signo menos es que la aceleración es negativa cuando el seno de la fase es positivo y viceversa.

3.8) Relaciones de funciones trigonométricas respecto a ángulos del primer cuadrante.

En este punto será de mucha ayuda conocer el valor del seno, coseno y tangente de los ángulos más comunes del primer cuadrante. La tabla 3-I condensa estos valores.

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tabla 3-I

3.8.1) Relación entre las funciones trigonométricas de dos ángulos complementarios.

Recordemos que dos ángulos son *complementarios* cuando su suma es igual a un ángulo recto.

Consideremos un ángulo α del primer cuadrante, referido a una circunferencia trigonométrica de centro O (fig. 3-15), que al determinar su abscisa y ordenada se obtiene el triángulo rectángulo OMP. En este triángulo, el ángulo $O\hat{P}M = \beta = 90° - \alpha$, pues los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son *complementarios*.

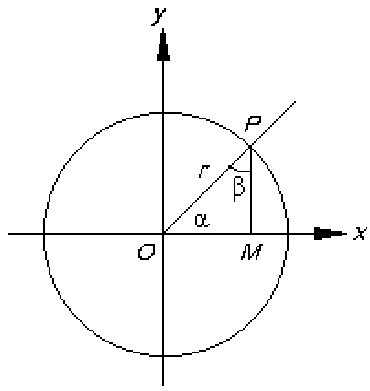


Fig. 3-15

Pero

$$sen\,\alpha = \frac{y}{r};\quad sen\,(90° - \alpha) = \frac{cat.\,op.\,(90° - \alpha)}{hipotenusa} = \frac{x}{r}$$

$$cos\,\alpha = \frac{x}{r};\quad cos\,(90° - \alpha) = \frac{cat.\,ady.\,(90° - \alpha)}{hipotenusa} = \frac{y}{r}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x};\quad tg\,\,(90° - \alpha) = \frac{cat.\,op.\,(90° - \alpha)}{cat.\,ady.\,(90° - \alpha)} = \frac{x}{y}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{x}{y};\quad cotg\,(90° - \alpha) = \frac{cat.\,ady.\,(90° - \alpha)}{cat.\,op.\,(90° - \alpha)} = \frac{y}{x}$$

$$sec\,\alpha = \frac{r}{x};\quad sec\,(90° - \alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.\,ady.\,(90° - \alpha)} = \frac{r}{y}$$

$$cosec\,\alpha = \frac{r}{y};\quad cosec\,(90° - \alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.\,op.\,(90° - \alpha)} = \frac{r}{x}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &= cos\,(90° - \alpha) \\ cos\,\alpha &= sen\,(90° - \alpha) \\ tg\,\alpha &= cotg\,(90° - \alpha) \\ cotg\,\alpha &= tg\,(90° - \alpha) \\ sec\,\alpha &= cosec\,(90° - \alpha) \\ cosec\,\alpha &= sec\,(90° - \alpha) \end{aligned} \qquad (3\text{-}20)$$

Por lo tanto, podemos enunciar:

El seno, la tangente y la secante de un ángulo, son respectivamente iguales al coseno, la cotangente y la cosecante del ángulo complementario y viceversa.

OBSERVACIONES:

I) El coseno, la cotangente y la cosecante deben su nombre a la propiedad anterior, pues co-seno, co-tangente y co-secante significan precisamente, seno del complemento, tangente del complemento y secante del complemento.

Suele designarse al coseno, a la cotangente y a la cosecante con el nombre de *co-funciones.*

II) Esta propiedad de las funciones de los ángulos complementarios explica por qué son iguales las funciones y las co-funciones respectivas de los ángulo de 30° y 60°; 0° y 90° y las de 45° cuyo complemento es el mismo ángulo.

3.8.2) Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos suplementarios.

Recordemos que dos ángulos son *suplementarios* cuando su suma es igual a 180º.

Consideremos un ángulo α del primer cuadrante referido a una circunferencia trigonométrica de centro O, con lo que resulta que su suplemento (180°-α) pertenece al segundo cuadrante. En la fig. 3-16 Se trazan por los puntos P y P’ las perpendiculares al eje de las x, formándose dos triángulos rectángulos:

$$O\hat{M}P = O\hat{M}'P' \text{ por tener: } \begin{cases} r = radio\ \ circunferencia\ \ trigonométrica \\ P\hat{O}M = P'\hat{O}M' = \alpha \end{cases}$$

Luego: $y' = +y;\ -x' = x$

O bien: $x' = -x$

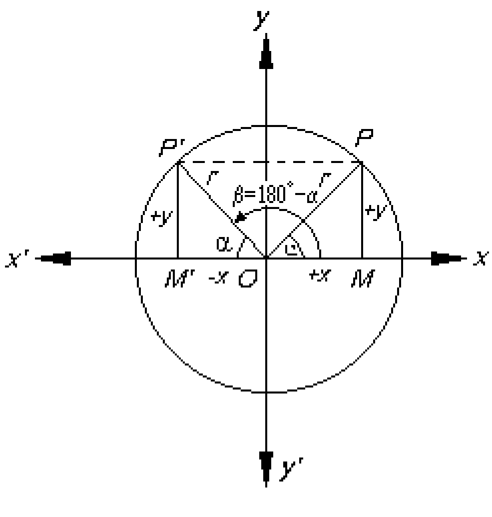


Fig. 3-16

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
&sen\,(180° - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{y}{r} = sen\,\alpha \\
&cos\,(180° - \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -cos\,\alpha \\
&tg\,(180° - \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -tg\,\alpha \\
&cotg\,(180° - \alpha) = \frac{x'}{y'} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y} = -cotg\,\alpha \\
&sec\,(180° - \alpha) = \frac{r}{x'} = \frac{r}{-x} = -\frac{r}{x} = -sec\,\alpha \\
&cosec\,(180° - \alpha) = \frac{r}{y'} = \frac{r}{y} = cosec\,\alpha
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}21)
$$

En consecuencia, se establece que:

Las funciones trigonométricas de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto pero de signo contrario, con excepción de las funciones seno y cosecante, que son iguales en valor absoluto y en signo.

3.8.3) Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos que difieren en 90°.

Consideremos los ángulos α y (α+90°), referidos a una círcunferencia trigonométrica de centro O (fig. 3-17).

Determinando sus correspondientes abscisas y ordenadas quedan formados:

$$
O\hat{A}B = O\hat{D}C \;\; rectángulos \;\; \begin{cases} \overline{OB} = \overline{OC} = r \\ \alpha = O\hat{C}D \end{cases}
$$

Luego:

$\overline{DC} = \overline{OA}$ o sea $y' = x$

y $\overline{OD} = \overline{AB}$ o sea $-x' = y$

O bien:

$$x' = -y$$

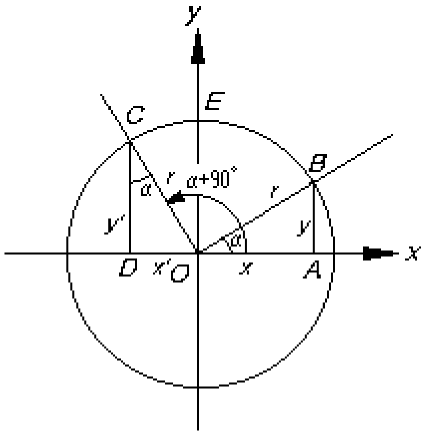


Fig. 3-17

Por ello:

$$sen\,(90° + \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = cos\,\alpha$$

$$cos\,(90° + \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -sen\,\alpha$$

$$tg\,(90° + \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -cotg\,\alpha$$

e invirtiendo se tienen relaciones análogas para las demás funciones.

3.8.4) Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos que difieren en 180°.

Considerando α y (α+180°),referidos a una circunferencia trigonométrica de centro O, y en los cuales se han determinado sus correspondientes abscisas y ordenadas (fig. 3-18), quedan formados:

$$O\hat{P}M = O\hat{P}'\,M' \;\; rectángulos \;\; \begin{cases} \overline{OM} = \overline{OM'} = r \\ \alpha = P'\,\hat{O}M' \;\; por\ opuestos\ por\ el\ vértice \end{cases}$$

Luego

$$-x' = x \text{ o bien } x' = -x$$

$$-y' = y \text{ o bien } y' = -y$$

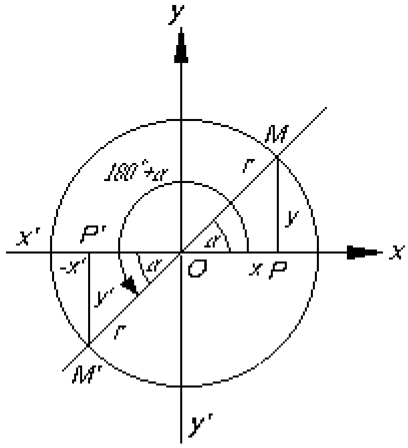


Fig. 3-18

Por lo tanto:

$$sen\,(180° + \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -sen\ \alpha$$
$$cos\,(180° + \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{-x}{r} = -cos\ \alpha \qquad (3\text{-}23)$$
$$tg\,(180° + \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-x} = +tg\ \alpha$$

Invirtiendo se tienen las restantes funciones.

En resumen:

Las funciones trigonométricas de dos ángulos que difieren en 180°, son iguales en valor absoluto pero de signo contrario, con excepción de la tangente y la cotangente, que lo son en valor absoluto y en signo.

3.8.5) Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos opuestos o simétricos.

Dos ángulos son opuestos o simétricos cuando tienen igual valor absoluto y signo contrario.

Consideremos en una circunferencia trigonométrica de centro O, los ángulos opuestos α y (-α), siendo $\overline{OM}$ y $\overline{OM'}$ los radio vectores (ver figura 3-19).

El segmento MM’ cortará al eje de las x en un punto P, con lo que queda formado el triángulo isósceles $M\hat{O}M'$, en el cual OP será la bisectriz. Pero, la bisectriz en el ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es a la vez altura y mediana. Luego $\overline{OP} = x = x'$, $\overline{PM} = y$; $\overline{PM'} = y'$; $-y' = y$ o bien $y' = -y$.

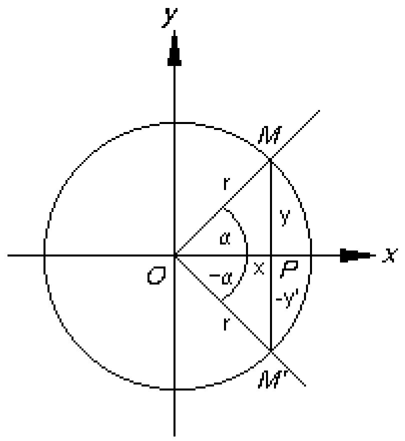


Fig. 3-19

Así:

$$\begin{aligned}
sen\,(-\alpha) &= \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -sen\ \alpha \\
cos\,(-\alpha) &= \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = cos\ \alpha \\
tg\,(-\alpha) &= \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -tg\ \alpha \\
cotg\,(-\alpha) &= \frac{x'}{y'} = \frac{x}{-y} = -cotg\ \alpha \\
sec\,(-\alpha) &= \frac{r}{x'} = \frac{r}{x} = sec\ \alpha \\
cosec\,(-\alpha) &= \frac{r}{y'} = \frac{r}{-y} = -cosec\ \alpha
\end{aligned} \qquad (3\text{-}24)$$

Por ello podemos enunciar:

Las funciones trigonométricas de dos ángulos opuestos o simétricos son iguales en valor absoluto y de signo contrario, con excepción del coseno y la secante que son iguales en valor absoluto y en signo.

3.8.6) Relaciones entre las funciones trigonométricas de dos ángulos que difieren en un múltiplo de 360°

Dos ángulos que difieren en un múltiplo de 360° (fig. 3-20) se llaman congruentes y tienen la particularidad de tener coincidentes la posición del radio vector.

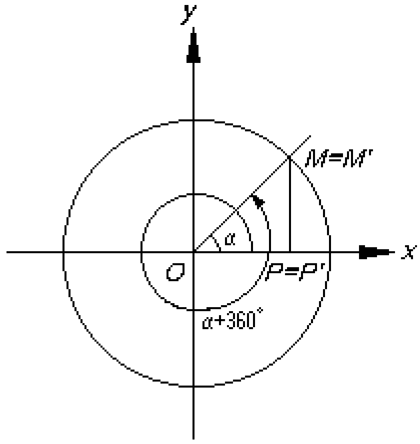


Fig 3-20

Si estos ángulos α y (α + n 360°) se refieren a una circunferencia trigonométrica, les corresponderá la misma abscisa y la misma ordenada, y por lo tanto las mismas funciones trigonométricas.

Claro está que sucederá lo mismo cuando a un ángulo α se le reste 360°, o un múltiplo de 360°, cuya expresión es (n 360°).

Por ello:

Cuando a un ángulo se le aumenta o se le disminuye en un múltiplo de 360°, las funciones trigonométricas del ángulo que se obtiene serán iguales en valor absoluto y en signo a las del primero.

3.8.7) Reducción de un ángulo al primer cuadrante.

Reducir un ángulo cualquiera al primer cuadrante significa determinar un ángulo agudo comprendido entre 0° y 90° positivo, cuyas funciones trigonométricas sean iguales en valor absoluto a las del ángulo dado.Este problema tiene importancia para la simplificación de expresiones.

Se pueden presentar varios casos:

1°) *El ángulo dado está en el segundo cuadrante, es decir, está comprendido entre 90° y 180°.*

Basta hallar su suplemento y tener en cuenta la regla de los signos para las funciones trigonométricas.

Ejemplos: Calcular las funciones de 130° (fig. 3-21):

$$sen\,130° = sen\,(180° - 130°) = sen\,50°$$
$$cos\,130° = -\,cos\,(180° - 130°) = -\,cos\,50°$$
$$tg\,130° = -\,tg\,(180° - 130°) = -\,tg\,50°$$
$$cotg\,130° = -\,cotg\,(180° - 130°) = -\,cotg\,50°$$
$$sec\,130° = -\,sec\,(180° - 130°) = -\,sec\,50°$$
$$cosec\,130° = cosec\,(180° - 130°) = cosec\,50°$$

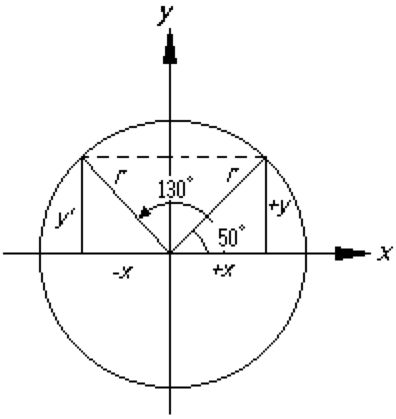


Fig. 3-21

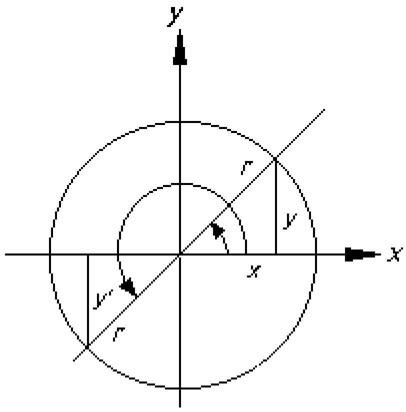


Fig. 3-22

Otros ejemplos:

$$tg\,100° = -\,tg\,(180° - 100°) = -\,tg\,80°$$
$$cos\,99°10' = -\,cos\,(180° - 99°10') = -\,cos\,80°50'$$

2°) *El ángulo dado está en el tercer cuadrante, es decir, está comprendido entre 180° y 270°* (fig 3-22).

Basta restar 180° al ángulo dado y tener en cuenta la regla de los signos para las funciones trigonométricas.

Ejemplos:

$$sen\,230° = -\,sen\,(230° - 180°) = -\,sen\,50°$$
$$tg\,190° = tg\,(190° - 180°) = tg\,10°$$
$$sec\,200° = -\,sec\,(200° - 180°) = -\,sec\,20°$$
$$cos\,220° = -\,cos\,(220° - 180°) = -\,cos\,40°$$
$$cotg\,250° = cotg\,(250° - 180°) = cotg\,70°$$
$$cosec\,260°23' = -\,cosec\,(260°23' - 180°) = -\,cosec\,80°23'$$

3°) *Reducción al primer cuadrante de un ángulo del cuarto cuadrante, es decir, comprendido entre 270° y 360°.*

Basta restar el ángulo dado a 360°, y tener en cuenta la regla de los signos para las funciones trigonométricas.

Ejemplos:

$$sen\ 300° = -\ sen\ (360° - 300) = -\ sen\ 60°$$
$$cos\ 325° = cos\ (360° - 325°) = cos\ 35°$$
$$tg\ 350°10' = -\ tg\ (360° - 350°10') = -\ tg\ 9°50'$$

4°) *El ángulo dado es mayor que 360°.*

Basta restar al ángulo dado el mayor múltiplo de 360° que contenga, obteniéndose un ángulo congruente con el dado, perteneciente a uno de los cuatro cuadrantes

En cuanto a las funciones se tiene:

a) Si el ángulo obtenido pertenece al primer cuadrante, todas las funciones trigonométricas serán positivas.

b) Si en cambio, termina en uno cualquiera de los otros cuadrantes, el problema se reduce a uno de los casos anteriores.

Ejemplos:

$$sen\ 780° = sen\ (780°\text{-}360°\ .\ 2) = sen\ 60° \quad (1°\ cuadrante)$$
$$\cos 1.000° = \cos (1.000° - 360° \times 2) = \cos 280° \ (4°\ cuadrante)$$
$$= \cos (360°\text{-}280°) = \cos 80°$$
$$\cos 1.540° = \cos (1.540°\text{-}360° \times 4) = \cos 100° \ (2°\ cuadrante)$$
$$= \cos (90° + 10°) = -sen\ 10°$$
$$tg\ 1.300° = tg\ (1.300° - 360° \times 3) = tg\ 220° \ (3°\ cuadrante)$$
$$= tg\ (220°\text{-}180°) = tg\ 40°$$

3.8.8) Problemas de aplicación.

1) Demostrar las siguientes igualdades:

a) sen 420º cos 390º + cos (-300º) sen (-330º) = 1

b) cos 570º sen 510º - sen 330º cos 390º = 0

c) a cos (90º-x) + b cos (90º+x) = (a – b) sen x

2) Calcular el valor de x en las siguientes expresiones:

a) x = 0,5 cotg (-30º) + sec 135º - tg 330º R: $-\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

b) x = 4 cos (-135º) + 0,5 sen (-120º) *R:* $-2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

c) x = 0,25 tg 210º - sec 180º + 0,5 cos 720º *R:* $\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{3}{2}$

d) x = 2 sen 750º - 0,5 tg (-240º) *R:* $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) x = cos (-840º) – cotg (570º) *R:* $-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

f) x = sec (-300º) + tg (-315º) + cosec(-210º) *R: 5*

g) x = cotg 480º + cosec 135º + sec135 *R:* $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) x = sen (-45º) + tg (-45º) + sec 135º *R:* $-\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$

i) x = tg 480º + cosec 660º *R:* $-\frac{5}{3}\sqrt{3}$

j) x = 2 sen 150º - 4 cos 240º - cotg 300º *R:* $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Verificar los siguientes resultados

a) sen [(9 / 2) π] = 1

b) sen [(7 / 3) π] = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) cos [(5 / 2) π] = 0

d) tg [(11 / 4) π] = -1

e) cotg [(7 / 6) π] = $\sqrt{3}$

4) Calcular el valor de x

a) x = (cotg 240º + tg 150º) / (1 - tg 240º tg 150º) *R: 0*

b) (cotg 120º -1) = x sen 60º cos 330º *R:* $-\frac{4}{9}\left(\sqrt{3}+3\right)$

Tema 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

4.1) Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo, es calcular los valores de los lados y ángulos desconocidos del mismo, en función de los que se conocen. Para ello, es indispensable conocer dos elementos entre los cuales figure por lo menos, un lado.

4.1.1) Primer caso: Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.

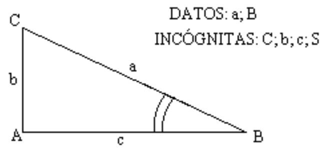


Fig. 4-1

Determinación de b.

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{b = a\, sen\, \hat{B}}$$

Determinación de $\hat{C}$.

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \Rightarrow \boxed{\hat{C} = 90° - \hat{B}}$$

Determinación de c.

$$\cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{c = a\ \cos\ \hat{B}}$$

Determinación del valor de la superficie S en función de los datos.

$$S = \frac{1}{2}\ base\ \ altura$$

$$S = \frac{1}{2} c\ \ b = \frac{1}{2}\ a\ \ \cos\ \hat{B}\ \ a\ \ sen\ \hat{B}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\ a^2\ \ sen\ \hat{B}\ \ \cos\ \hat{B}}$$

4.1.2) Segundo caso: Resolver un triángulo rectángulo dados un cateto y un ángulo agudo.

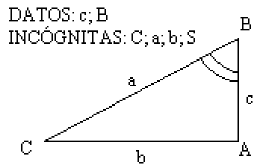


Fig. 4-2

Determinación de $\hat{C}$.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \Rightarrow \quad \boxed{\hat{C} = 90° - B}$$

Determinación de a.

$$\cos\ \hat{B} = \frac{c}{a};\quad a\ \ \cos\ \hat{B} = c \Rightarrow \boxed{a = \frac{c}{\cos \hat{B}}}$$

Determinación de b.

$$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{b = c\ \ tg\ \hat{B}}$$

Determinación de la superficie S en función de los datos.

$$S = \frac{1}{2} c\, b$$
$$S = \frac{1}{2} c\, c\, tg\ \hat{B}$$

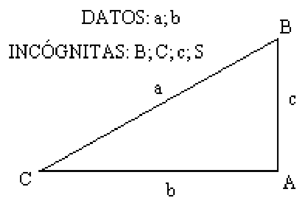
$$\boxed{S = \frac{1}{2} c^2\ tg\ \hat{B}}$$

4.1.3) Tercer caso: Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa.

Determinación de $\hat{B}$.

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\hat{B} = arc\ sen \frac{b}{a}}$$

Fig. 4-3



Determinación de c.

Teniendo en cuenta un corolario del Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\boxed{c = \sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

Determinación de $\hat{C}$.

$$\cos \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{\hat{C} = arc\ \cos \frac{c}{a}}$$

Determinación del valor de la superficie S en función de los datos.

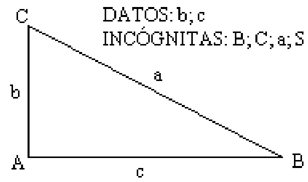
$$S = \frac{1}{2} b\, c$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

4.1.4) Cuarto caso: Resolver un triángulo rectángulo dados los dos catetos.

Determinación de $\hat{B}$.

$$\boxed{arc\ tg\ \hat{B} = \frac{b}{c}}$$



Determinación de $\hat{C}$.

$$\boxed{arc\ \cot g\ \hat{C} = \frac{b}{c}}$$ o bien $$\boxed{\hat{C} = 90° - B}$$

Fig. 4-4

Determinación de a.

$a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras

$$\boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$$

Determinación del valor de la superficie S en función de los datos.

$$\boxed{S = \frac{1}{2} b\, c}$$

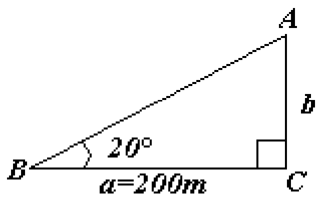
4.1.5) Ejemplos de aplicación

1) Determinación del ancho de un río.

Un topógrafo puede medir el ancho de un río emplazando su teodolito en un punto *C* en un borde del río y visualizando un punto *A* situado en el otro borde. Después de girar un ángulo de 90° en *C,* se desplaza 200 m hasta el punto *B*. Allí, apuntando a A*,* mide el ángulo β y encuentra que es de 20°. ¿Cuál es el ancho del río?

<u>Solución</u>: Del triángulo rectángulo formado entre A, B y C, buscamos la longitud del lado CA a la cual llamaremos *b.* Como conocemos *a* y β, usamos la relación:

$$tg\ \beta = \frac{b}{a}$$



es decir: $$tg\ 20° = \frac{b}{200m} \Rightarrow b = 200m\ tg\ 20° \approx \boxed{72{,}79m}$$

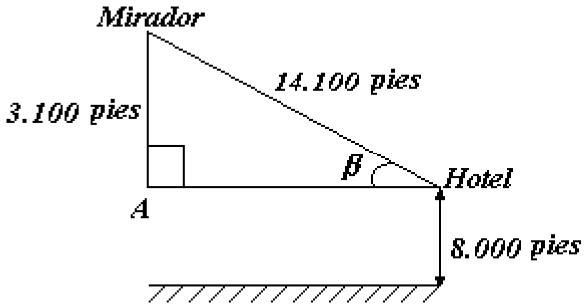
El ancho del río es, entonces, de 73 m aproximadamente, redondeando al metro más cercano.

2) Determinación de la inclinación del sendero de una montaña.

Un sendero recto con inclinación uniforme conduce de un hotel con una elevación de 8.000 pie a un mirador, cuya elevación es de 11.100 pie. La longitud del sendero es de 14.100 pie. ¿Cuál es la inclinación del sendero?

Solución: Buscamos el ángulo de inclinación β.

$$sen\ \beta = \frac{3.100}{14.100} \Rightarrow \boxed{\beta \approx 12{,}7°}$$



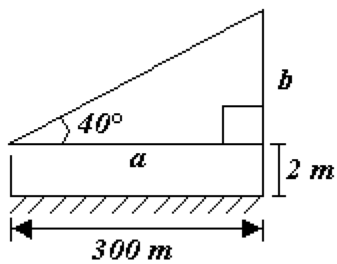
La inclinación del sendero es aproximadamente 12,7°

3) Determinación de una altura mediante el ángulo de elevación.

Para determinar la altura de una torre radiotransmisora, un topógrafo se sitúa a 300 m de su base. El topógrafo mide el ángulo de elevación y encuentra que es de 40°. Si el teodolito está situado a 2 m de altura cuando se hace la lectura, ¿qué tan alta es la torre?

Solución: Para encontrar la altura desde el teodolito a la punta de la antena (lado *b*), usamos la relación $tg\ \beta = b/a$. Entonces,

$$\mathrm{b} = \mathrm{a}\ \mathrm{tg}\ \beta = 300\mathrm{m}\ \ \mathrm{tg}40° = 251{,}73m$$



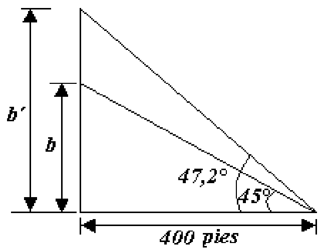
Dado que el teodolito está a 2 m de altura, la altura real de la torre es aproximadamente 254 m, redondeada al metro más cercano.

4) Determinación de la altura de una estatua sobre un edificio.

Sobre la azotea del edificio de la Cámara de Comercio de Chicago, se encuentra una estatua de la diosa griega Ceres, diosa de la agricultura. Se hacen dos observaciones desde el nivel de la calle en un punto situado a 400 pie del centro del edificio. El ángulo de elevación hasta la base de la estatua resulta ser de 45,0° y el ángulo medido hasta la parte superior de la estatua resulta ser de 47,2°. ¿Cuál es la altura de la estatua?

Solución: La altura de la estatua será la diferencia entre las dos alturas observadas, esto es *b'-b*. Para encontrar *b* y *b'*, planteamos:

$$tg\ \ 45° = \frac{b}{400pies} \Rightarrow b = 400pies\ \ tg\ \ 45° = 400pies$$



$$tg\ 47{,}2° = \frac{b'}{400 pies} \Rightarrow b' = 400 pies\ \ tg\ 47{,}2° = 431{,}96 pies$$

La altura de la estatua es aproximadamente 32 pie.

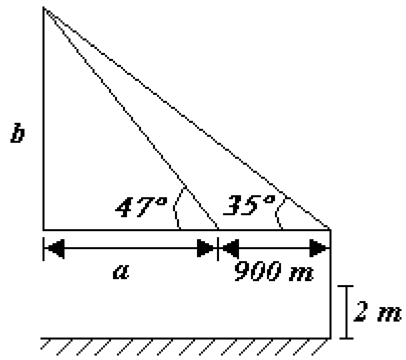
5) Determinación de la altura de una montaña.

Para medir la altura de una montaña, un topógrafo se sitúa en la base de la misma y toma dos visuales de la cima desde dos posiciones al mismo nivel, separadas entre sí 900m sobre una línea directa a la montaña. La primera observación da un ángulo de elevación de 47° y la segunda uno de 35°. Si el teodolito está a 2 m del suelo, ¿Cuál es la altura b de la montaña?

<u>Solución</u>: A partir de los dos triángulos que se generan, encontramos que para la misma altura (la de la montaña), se cumple:

$$tg\ \beta' = \frac{b}{a+900m} \Rightarrow tg\ 35° = \frac{b}{a+900m}$$

$$tg\ \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow tg\ 47° = \frac{b}{a}$$



donde *a* es la distancia (desconocida) entre el prim de la montaña.

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a y b. Puesto que buscamos b, escogemos despejar el valor de a en la segunda ecuación y sustituir el resultado, $\mathrm{a} = \mathrm{b} / \mathrm{tg}\ \ 47° = \mathrm{b}\ \ \mathrm{cotg}\ \ 47°$, en la primer ecuación. Obtenemos,

$$tg\ 35° = \frac{b}{b\ \cot g\ 47° + 900m}$$

$$b = (b\ \cot g\ 47° + 900m)\ tg\ 35°$$

$$b = b\ \cot g\ 47°\ tg\ 35° + 900m\ tg\ 35°$$

$$b\ (1 - \cot g\ 47°\ tg\ 35°) = 900m\ tg\ 35°$$

$$b = \frac{900m\ tg\ 35°}{1 - \cot g\ 47°\ tg\ 35°} = \frac{900m\ tg\ 35°}{1 - \frac{tg\ 35°}{tg\ 47°}} = 1.816m$$

La altura del pico desde el nivel del suelo es por tanto *(1.816+2)m =* $\boxed{1.818m}$

6) Determinación del rumbo de un aeroplano.

En navegación, la dirección o rumbo desde el origen O de un objeto que se encuentra en P, lo describe el ángulo positivo medido en el sentido de las manecillas del reloj (obsérvese que esta convención es opuesta a la que estamos acostumbrados) desde el norte (N) hasta el rayo OP (figura 4-5).

Un avión Boeing 777 despega del aeropuerto de la ciudad de Santa Fe desde una pista que tiene un rumbo de 22°. Después de volar 1,0 milla, el piloto solicita permiso para girar 90° y dirigirse hacia el noroeste. Se le da permiso.

a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?

b) Después de volar 2 millas en esta dirección, ¿Qué rumbo debe usar la torre de control para localizar el avión?

Solución: *(a)* Después de volar 1 milla desde el aeropuerto O (la torre de control), el avión está en P. Después de girar 90° hacia el noroeste, vemos que:

Ángulo NOP = 22° *Ángulo RQN = 90°-22° = 68°*

El rumbo del avión, entonces,

360° - ángulo RQN = 360° - 68° = 292°

Recuerde que en este problema el sentido (+) está dado en el sentido del reloj desde el N.

(b) Después de volar 2 millas con un rumbo de 292°, el avión está en R. Si θ = *ángulo ROP*, entonces,

$tg\ \theta = \frac{2}{1} = 2$, por lo que $\theta = 63{,}4°$

En consecuencia,

Ángulo RON = θ *- 22° = 41,4°*

El rumbo del avión desde la torre de control en O

360° - *ángulo RON* = 360° - 41,4° = 318,6°

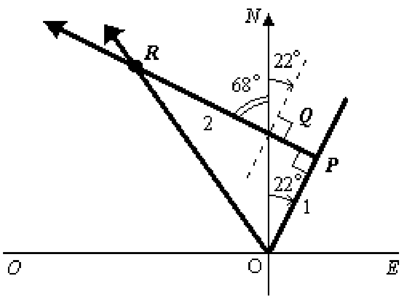
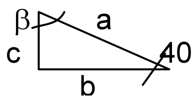


Fig. 4-5

4.1.6) Problemas de aplicación

1) Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 2,00 cm de longitud. Si uno de sus ángulos mide 40°, encuentre la longitud de cada cateto.

Rta: 

c = 1,28 cm, b = 1,53 cm

2) Un triángulo rectángulo contiene un ángulo de 35°. Si el cateto opuesto mide 5,00 cm. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

R: 8,72 cm

3) Un triángulo rectángulo contiene un ángulo de $\pi/10$ radianes. Si el cateto adyacente mide 3,00 m. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

R: 3,15 m

4) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 3,00 pie. Si uno de sus catetos mide 1,00 pie, encuentre el tamaño de cada ángulo en grados.

R: α= 19º28'16,39'', β= 70º3143,61''

5) Cuando el ángulo de elevación (el ángulo hacia arriba desde la horizontal) del Sol es de 28,4° en Paris, la Torre Eiffel forma una sombra horizontal de 555,34 m de largo. ¿Qué altura tiene la torre?

R: 300,27 m

6) Un barco, cerca de un acantilado vertical de 100 pie de altura, hace una lectura del borde del acantilado. Si el ángulo de elevación es de 25°, ¿qué tan lejos está el barco de la costa?

R: 214,4 pie

7) Suponga que se dirige hacia una meseta de 50 m de altura. El ángulo de elevación a la meseta es de 20°, ¿qué tan lejos está usted de la base de la meseta?.

R: 137,4 m

8) Un barco se encuentra en la bahía de Nueva York; desde él se toma una visual a la estatua de la libertad, que tiene aproximadamente 305 pie de altura. Si el ángulo de elevación a la parte superior de la estatua es de 20°, ¿qué tan lejos está el barco de la base de la estatua?

R: 838 pie

9) Para medir la altura de un edificio, se toman dos visuales desde dos puntos situados a 50 pie entre sí. El ángulo de elevación de la primera es de 40° y el de la segunda es de 32°. ¿Cuál es la altura del edificio?.

R: 122,4 pie

10) Desde la punta de un faro, a 120 pie sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión (el ángulo hacia abajo desde la horizontal) en dirección a un barco a la deriva en el mar es de 9,4°. ¿A qué distancia está el barco de la base del faro?

R: 725 pie

11) ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol cuando un mástil de 24 m proyecta una sombra de 16 m?.

R: 56º18'36''

12) Una de las siete maravillas del mundo antiguo, la gran pirámide de Keops fue construida alrededor del año 2580 a.C. Su altura original era de 480 pie 11 pulgadas, pero debido a la pérdida de sus bloques superiores, es ahora algo más baja.

Encuentre la altura actual de la gran pirámide si los ángulos de elevación desde dos puntos situados a 100 pie uno de otro y ubicados en el nivel de la base de la pirámide, son 46,3º y 40,3º.

R: 447 pie

13) Sara está volando un barrilete y tiene sus manos a 5,0 pie por encima del suelo. Si el cometa está a 200 pie arriba del suelo y la cuerda del barrilete hace un ángulo de 32,4° con la horizontal, ¿cuántos pie de cuerda está usando?

R: 364 pie

14) ¿Cuál es la altura de una antena si una persona que se encuentra a 250 m de su base, observa su punta bajo un ángulo de 22°?

R: 101 m

15) Un barrilete se encuentra a 20 m de altura y su cuerda tiene una longitud de 80m. ¿Cuál es el ángulo que forma la cuerda con el piso, si las manos de quién lo sostiene están a 1,20 m del piso?

R: 13,6º

16) Desde la ventana de un edificio de oficinas, se ve una torre de televisión que está a 600 m de distancia (horizontalmente). El ángulo de elevación del extremo superior de la torre es de 19,6° y el ángulo de depresión de la base de la torre es de 21,3°. ¿Qué altura tiene la torre?.

R: 447,6 m

17) Se debe hacer pasar un rayo láser a través de un pequeño agujero en el centro de un círculo de 10 pie de radio, que está parado sobre una mesa. El origen del rayo está a 35 pie del círculo y sobre la mesa. ¿Con qué ángulo de elevación debe dirigirse el rayo para que pase por el agujero?

R: 16º

18) Para medir la altura de un refugio en la ladera de un monte, se toman dos lecturas desde una distancia de 800 pie de la base. Si el ángulo de elevación a la base del refugio es de 32° y el ángulo de elevación a la parte superior es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?

R: 60,27 m

19) Un dirigible está suspendido en el aire a una altura de 500 pie directamente sobre una línea que va desde un estadio a un planetario. El ángulo de depresión del dirigible al planetario es de 23° y del dirigible al estadio, de 32º. Encuentre la distancia entre el estadio y el planetario.

R: 1.978 pie

20) El ángulo de elevación de una antena de comunicaciones es de 35,1° en el instante en que arroja una sombra de 789 pie de longitud. Use esta información para calcular la altura de la antena.

R: 554,5 pie

21) El navegante de un barco visualiza dos faros separados 3 millas entre sí a lo largo de un tramo recto de la costa. Determina que los ángulos formados entre las dos líneas visuales a los faros y la visual dirigida perpendicularmente a la costa miden 15° y 35°. (a) ¿qué tan lejos está el barco de la costa?, (b) ¿qué tan lejos está el barco del faro A?, (c) ¿qué tan lejos está el barco del faro B?

R: a) 3,1 millas, b) 3,2 millas, c) 3,8 millas

22) Una roca de la orilla de un río está a 39,20 m sobre el nivel del agua. Desde un punto exactamente opuesto, sobre la otra orilla del río, el ángulo de elevación de la roca es de α = 14°36'. Calcular el ancho del río.

R: 150,5 m

23) Calcular el valor de la diagonal de un cubo cuya arista es 2.

R: 3,46

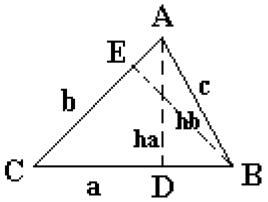
4.2) Triángulos oblicuángulos.

Definición: Se llama triángulo oblicuángulo al triángulo que tiene sus ángulos no rectos. Por ejemplo: Los triángulos acutángulos y obtusángulos son oblicuángulos. Los triángulos rectángulos no son oblicuángulos.

4.2.1) Teorema del Seno:

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Fig. 4-6



H) ABC, Triángulo.

T) $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$

D) Se traza la altura (h_a) y se forman los triángulos rectángulos ADC y ADB, en donde:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{C} = \dfrac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b\,sen\,\hat{C} \\ sen\,\hat{B} = \dfrac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c\,sen\,\hat{B} \end{array}\right\} b\,sen\,\hat{C} = c\,sen\,\hat{B}$$

o bien:
$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad (4.1)$$

Se dibuja la altura (h_b), quedando determinados los triángulos BEA y BEC. En ellos:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{A} = \dfrac{h_b}{c} \Rightarrow h_b = c\,sen\,\hat{A} \\ sen\,\hat{C} = \dfrac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\,sen\,\hat{C} \end{array}\right\} c\,sen\,\hat{A} = a\,sen\,\hat{C}$$

o bien:
$$\frac{c}{sen\,\hat{C}} = \frac{a}{sen\,\hat{A}} \qquad (4.2)$$

De (4-1) y (4-2) se infiere que:

$$\boxed{\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}} \qquad (4.3)$$

fórmula que expresa las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

4.2.2) Otras relaciones empleadas en la resolución de Triángulos Oblicuángulos.

Teorema del Coseno:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \cos\ \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ \cos\ \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ \cos\ \hat{C} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Teorema de las Tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{tg\,\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}} \quad (4.5)$$

Teorema de los Ángulos Medios:

$$\begin{aligned} tg\,\frac{\hat{A}}{2} &= \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \\ tg\,\frac{\hat{B}}{2} &= \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)} \\ tg\,\frac{\hat{C}}{2} &= \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

La letra *p* indica el semiperímetro del triángulo, esto es: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (4.7)

Teorema relativo al área del triángulo:

$$\begin{aligned} Area &= \frac{1}{2}\ a\ b\ sen\ \hat{C} \\ Area &= \frac{1}{2}\ b\ c\ sen\ \hat{A} \\ Area &= \frac{1}{2}\ a\ c\ sen\ \hat{B} \end{aligned} \quad (4.8)$$

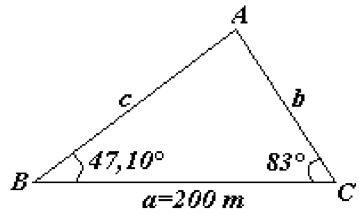
Área del triángulo en función de los tres lados. Fórmula de Herón:

$$Area = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (4.9)$$

La letra *p* indica el semiperímetro del triángulo.

4.2.3) Ejemplos de aplicación

1) Resolver un triángulo oblicuángulo, sabiendo que:



$a = 200m \qquad \hat{B} = 47°10' \qquad \hat{C} = 83°$

Incógnitas: $\hat{A}, b, c$ y Área

Cálculo de $\hat{A}$: $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 49°50'}$

Cálculo de *b*: $\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{a}{sen\hat{A}} \Rightarrow b = \frac{200m\ sen(47°10')}{sen(49°50')} \Rightarrow \boxed{b \cong 192m}$

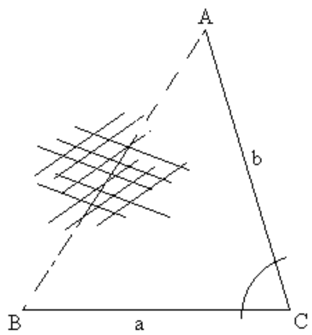
Cálculo de *c*: $\frac{c}{sen\ \hat{C}} = \frac{a}{sen\ \hat{A}} \Rightarrow c = \frac{200m\ \ sen\,(83°)}{sen\,(49°50')} \Rightarrow \boxed{c \cong 260m}$

Cálculo del área del triángulo:

$Area = \frac{1}{2} a\ b\ sen\ \hat{C} \Rightarrow Area = \frac{a^2\ sen\ \hat{B}\ sen\ \hat{C}}{2\ sen\ \hat{A}}$; por ser: $b = \frac{a\ sen\ \hat{B}}{sen\ \hat{A}}$

$$Area = \frac{200^2\, m^2\ \ sen(47°10')\, sen(83°)}{2\ sen(49°50')} \Rightarrow \boxed{Area \cong 1{,}91\ \ 10^4\ \ m^2}$$

2) Calcular la distancia entre dos puntos, ambos accesibles pero separados por un obstáculo que impide la medición directa.



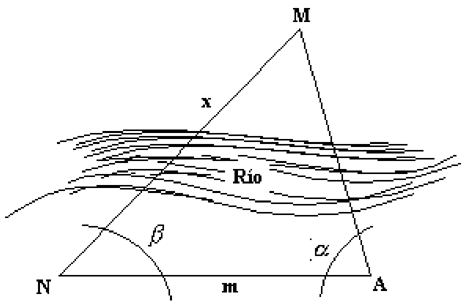
<u>Solución:</u> Dados los puntos A y B, para determinar su distancia se elige otro punto C desde el cual sean visibles y accesibles aquellos puntos.

Se miden con un cinta, por ejemplo, las distancias $\overline{CA} = b$ y $\overline{CB} = a$, y con un teodolito el ángulo comprendido $\hat{C}$.

Se resuelve el triángulo ABC del que se conocen los lados y el ángulo comprendido; por ejemplo, con el teorema del coseno se puede determinar AB.

$$\overline{A}\,\overline{B} = c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}$$

3) Calcular la distancia de un punto accesible N a otro inaccesible M, pero que puede verse desde el primero.



Solución: Se elige sobre el terreno accesible un tercer punto A desde donde puedan ser vistos los puntos M y N.

Con una cinta métrica, por ejemplo, se mide la base $\overline{NA} = m$, del triángulo que se forma, y con un teodolito se miden los ángulos α y β. Con estos datos se puede resolver el problema.

En efecto, por el teorema del Seno se tiene:

$$\frac{x}{sen\ \alpha} = \frac{m}{sen\ \hat{M}} \qquad \text{pero } \hat{M} = 180° - (\alpha + \beta)$$

o bien:

$$sen\ \hat{M} = sen\ [180° - (\alpha + \beta)] = sen\ (\alpha + \beta)$$ (Por reducción al primer cuadrante)

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{x}{sen\ \alpha} = \frac{m}{sen\ (\alpha + \beta)} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m\ sen\ \alpha}{sen\ (\alpha + \beta)}}$$

Ejemplo: Si los datos fueran:

$$m = 20m$$
$$\alpha = 32°$$
$$\beta = 47°10'$$

$$x = \frac{m\ sen\ \alpha}{sen\ (\alpha + \beta)}$$

$$x = \frac{20m\ sen\ 32°}{sen\ (32° + 47°10')}$$

Resolviendo:

$$x = \frac{20m\ 0,5299}{0,9822} \Rightarrow \boxed{x = 10,8m}$$

4.2.4) Problemas de aplicación

1) Resolver un triángulo siendo sus datos: a = 203,20m; b = 215,40m; $\hat{C}$ = 72°10'

R: $A = 51°37'24''$; $B = 56°12'24''$; $c = 246,73m$; $Area = 20.833m^2$

2) Resolver un triángulo oblicuángulo (incluida su superficie) sabiendo que: *a = 1258m;* $\hat{B}$ *=70°5';* $\hat{C}$ *= 51°4'*

R: $\hat{A} = 58°51'$; $b = 1.382m$; $c = 1.143m$; $S = 6,76\ 10^5\ m^2$

3) El ángulo de elevación de la parte superior de una torre es de 30°, acercándose 100m hacia la torre, dicho ángulo es de 60°. Hállese la altura de la torre.

R: 86,6 m

4) Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto (ubicado en la otra margen del río), determina un ángulo de elevación de 17°. Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?.

R: 13,56 m

5) Tres pueblos X, W y Z, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre X y W es de 6km; a los pueblos W y Z los separan 9km. El ángulo que forman las carreteras que unen X con W y W con Z es de 120°. ¿Qué distancia hay entre X y Z?.

R: 54,5 km

6) En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m. ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?

R: α = 52º53'27,58'', β = 85º27'33,6'' , δ = 41º38'58,82''

7) La estación guardacostas Punta Alta está situada a 150 millas al sur de la estación Necochea. Un barco que se encuentra al este de ambas, envía una llamada SOS de auxilio que es recibida por las dos estaciones. La llamada a la estación Punta Alta indica que el barco se localiza 35° al nordeste; la llamada a la estación Necochea indica que el barco está 30° al sureste. ¿Qué tan lejos está el barco de cada estación?

R: distancia a Punta alta 135,5 millas, distancia a Necochea 143,3 millas

8) Para encontrar la distancia de la casa en A a la casa en B (dos puntos sin acceso directo de uno a otro), un topógrafo se sitúa en el punto C y determina que el ángulo BAC es de 40°; luego camina una distancia de 100 pie hasta la casa en B y determina que el ángulo ACB es de 50°. ¿Cuál es la distancia de A a B?

R: 119,2 pie

9) Para encontrar la longitud de un elevador de esquiadores desde A (abajo) a B (arriba) sobre la ladera de una montaña, un topógrafo determinó que el ángulo de la ladera respecto a la horizontal es de 25°, luego caminó una distancia de 1.000 pie hasta C, alejándose de la montaña, donde midió 15° para el ángulo CBA. ¿Cuál es la distancia de A a B?

R: 1.490 pie

10) Un avión es visto por dos observadores que están a 1.000 pie de distancia entre sí. Cuando el avión pasa sobre la línea que une a los observadores, cada uno toma una lectura del ángulo de elevación del avión: 40º y 35º. ¿Qué tan alto está el avión?

R: 381,7 pie

11) La famosa torre inclinada de Pisa tenía originalmente 184,5 pie de altura. Después de alejarse horizontalmente unos 123 pie de la base de la torre, se encuentra que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es de 60°. Encuentre el ángulo de inclinación de la torre.

R: 5º15’51,8’’

4.3) Revisión de teoremas fundamentales.

4.3.1) Segmentos determinados por un haz de paralelas sobre dos transversales.

TEOREMA: Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, a segmentos iguales en una de éstas, corresponden segmentos iguales en la otra.

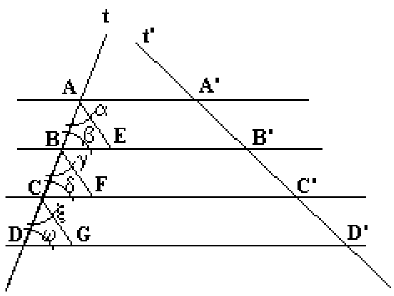


Fig. 4-7

H) *AA’ // BB’ // CC’ // DD’*

t y t’ transversales

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

T) $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

D) Se trazan por los puntos A, B y C las rectas AE, BF y CG paralelas a *t’* y se forman;

$A\hat{B}E = B\hat{C}F = C\hat{D}G$; iguales por el 2° criterio de congruencia

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$; por hipótesis

$\alpha = \gamma = \xi$; por correspondientes entre AE // BF // CG y secante *t*.

$\beta = \delta = \omega$; por correspondientes entre BB’ // CC’ // DD’ y secante *t*.

En consecuencia:

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG}; \quad (4.10) \quad \text{(lados opuestos a ángulos iguales)}$$

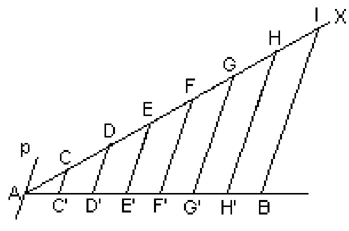
Pero AA’B’E, BB’C’F y CC’D’G son paralelogramos, puesto que: AE // A’B’; BF // B’C’ y CG // C’D’ por construcción, y AA’ // EB’ // FC’ // GD’ por hipótesis.

Por ello:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AE} = \overline{A'B'} \\ \overline{BF} = \overline{B'C'} \\ \overline{CG} = \overline{C'D'} \end{array}\right\} \text{ por lados opuestos de paralelogramos.}$$

Reemplazando en (4.10), se tiene:

$$\boxed{\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}}$$



PROBLEMA: Dividir un segmento AB en 7 partes iguales.

Solución: Se traza, con origen A, la semirrecta $\overrightarrow{AX}$, por ejemplo, y se dibujan en la misma 7 segmentos *consecutivos iguales* a partir de A:

AC = CD = DE = EF = FG = GH = HI

Fig. 4-8

Se unen I con B y luego se trazan, por los puntos H, G, F... paralelas a $\overline{IB}$. Estas cortan al segmento $\overline{AB}$ dado en 7 partes iguales:

$$\boxed{\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = \overline{G'H'} = \overline{H'B}}$$

Justificación:

En efecto, las rectas p // CC’ // DD’ // EE’ // FF’ // ... son cortadas por las transversales AX y AB, y como:

$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI}$ por construcción

$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = \overline{G'H'} = \overline{H'B}$ porque a *segmentos iguales en una transversal, corresponden segmentos iguales en la otra.*

OBSERVACIÓN: Este método de división de un segmento en partes iguales, *es independiente de la semirrecta y del segmento unidad* que se eligen para efectuar la construcción.

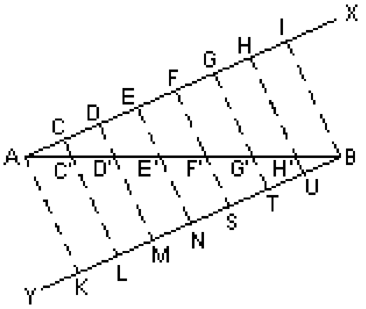


Fig. 4-9

Otro procedimiento:

Por los extremos A y B del segmento dado, se trazan las semirrectas $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$, que pertenezcan a distintos semiplanos, respecto del segmento $\overline{AB}$ y que sean paralelas. Se dibuja el segmento $\overline{AC}$, por ejemplo, 7 veces consecutivas, a partir del origen, sobre cada semirrecta, determinándose los puntos C, D, E, F, G, H, I, en la $\overline{AX}$ y los puntos U, T, S, N, M, L, K, en la $\overline{BY}$. Uniendo I con B, H con U, G con T, etc, se obtienen los puntos C', D', E', F', G' y H', y por lo tanto:

$\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = \overline{G'H'} = \overline{H'B}$ en virtud del teorema anterior.

NOTA:

I) Esta construcción es independiente del segmento unidad y de las semirrectas auxiliares elegidas.

II) Si se quiere dividir un segmento en 2,4,8,16, etc.., partes iguales, el problema puede resolverse, dibujando mediatrices.

Ejemplo: Dividir un segmento en 8 partes iguales.

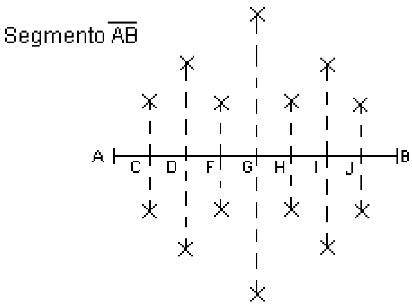


Fig. 4.10

Resulta:
$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JB}$

por definición de mediatriz.

4.3.2) Relaciones métricas en los triángulos rectángulos.

TEOREMA I: En un triángulo rectángulo cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella.

H) $C\hat{A}B$ rectángulo

$\overline{AH} \perp a$ en H

b' proyección de b sobre a

c' proyección de c sobre a

T) $\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}$; $\frac{a}{c} = \frac{c}{c'}$

D) Considerando los triángulos $B\hat{A}C$ y $A\hat{H}C$ que tienen $\begin{cases} \hat{C} \text{ común} \\ \hat{A} = \hat{H} \text{ por rectos} \end{cases}$

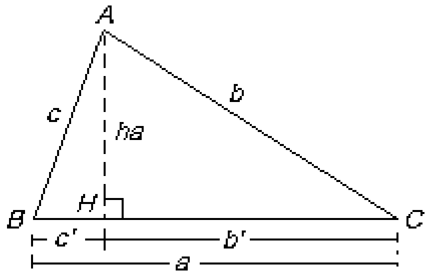


Fig. 4-11

Resulta $B\hat{A}C$ *semejante a* $A\hat{H}C$ por el 2° caso de semejanza de triángulos.

Luego, $\hat{B} = H\hat{A}C$ por definición de triángulos semejantes y:

$$\frac{a \text{ (hipotenusa } B\hat{A}C)}{b \text{ (hipotenusa } A\hat{H}C)} = \frac{b \text{ (cateto opuesto a } B \text{ en } B\hat{A}C)}{b' \text{ (cateto opuesto a } H\hat{A}C \text{ en } A\hat{H}C)}$$

por ser los triángulos semejantes, es decir: $\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}$ (4.11)

Análogamente, de los triángulos BAC y BHA se obtiene

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \qquad (4.12)$$

<u>TEOREMA II:</u> En un triángulo rectángulo la altura es medio proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa.

H) $C\hat{A}B$ rectángulo

$h_a \perp \overline{CB}$ en H

T) $\frac{c'}{h_a} = \frac{h_a}{b'}$

D) Considerando los triángulos rectángulos

$$CHA\ y\ AHB\ tal\ que \begin{cases} C\hat{H}A = A\hat{H}B\ por\ ángulos\ \ rectos \\ \hat{C} = B\hat{A}H\ por\ ser\ ambos\ iguales\ a\ 90°\text{-}\hat{B} \end{cases}$$

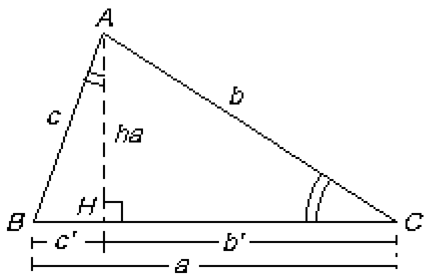


Fig. 4-12

Resulta $C\hat{H}A\, semejante\, a\, A\hat{H}B$ por el 2° caso de semejanza de triángulos, luego $H\hat{A}C = \hat{B}$ por definición de triángulos semejantes.

$$\frac{b'\ (cat.\ op.\ de\ H\hat{A}C\ en\ C\hat{H}A)}{h_a\ (cat.\ op.\ de\ \hat{B}\ en\ A\hat{H}B)} = \frac{h_a\ (cat.\ op.\ de\ \hat{C}\ en\ C\hat{H}A)}{c'\ (cat.\ op.\ de\ B\hat{A}H\ en\ A\hat{H}B)}$$

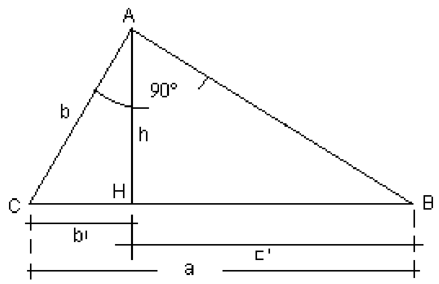
Finalmente:

$$\frac{b'}{h_a} = \frac{h_a}{c'} \qquad (4.13)$$

4.3.3) Teorema de Pitágoras.

Aplicando las relaciones métricas en el triángulo rectángulo se puede demostrar el Teorema de Pitágoras mediante razonamiento simple.

<u>ENUNCIADO:</u> En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



H) CAB rectángulo en A

T) $a^2 = b^2 + c^2$

D) Se traza la altura AH correspondiente a la hipotenusa y, de acuerdo a la relación (4.12), se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} \qquad \text{de donde } a\,b' = b\,b \qquad (4.14)$$

por propiedad de las proporciones.

Análogamente

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \qquad \text{de donde } a\,c' = c\,c \qquad (4.15)$$

Sumando miembro (4.14) y (4.15)

$$a\,b' + a\,c' = b\,b + c\,c$$

Sacando *a* como factor común:

$$a\,(b' + c') = b\,b + c\,c$$

pero $b' + c' = a$

Reemplazando se tiene:

$$a\,a = b\,b + c\,c$$

de donde

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad (4.16)$$

TEMA 5: COORDENADAS EN EL PLANO.

5.1) Coordenadas cartesianas rectangulares:

Para fijar la posición de un punto sobre un plano basta con conocer sus distancias a dos elementos fijos del mismo. En el sistema cartesiano los elementos fijos son dos rectas orientadas que se cortan perpendicularmente, y se denominan *ejes coordenados*; el punto de intersección se llama *origen de coordenadas.*

Dado un sistema cartesiano el plano queda dividido en cuatro porciones, que se denominan *cuadrantes*. Para poder operar con ellos se conviene en numerarlos siguiendo el movimiento contrario al de las agujas del reloj. Se elige una unidad de medida y se escriben sobre cada eje los números correspondientes a los segmentos de ejes tomados desde el origen.

Los números del eje horizontal se llaman *abscisas* y los números del otro eje son las *ordenadas*. Se considera que las abscisas son positivas si figuran a la derecha del eje de ordenadas y negativas las medidas a la izquierda. Análogamente son positivas las ordenadas del plano superior al eje de abscisas y son negativas las del plano inferior.

Se infiere fácilmente que todo punto del plano queda determinado por dos números, abscisa y ordenada, que corresponden a las perpendiculares a los ejes bajadas desde dicho punto.

En la figura 5-1 están representados los puntos *P (2,4); Q (-4,1); R (-2,-3) y M (4,-2).*

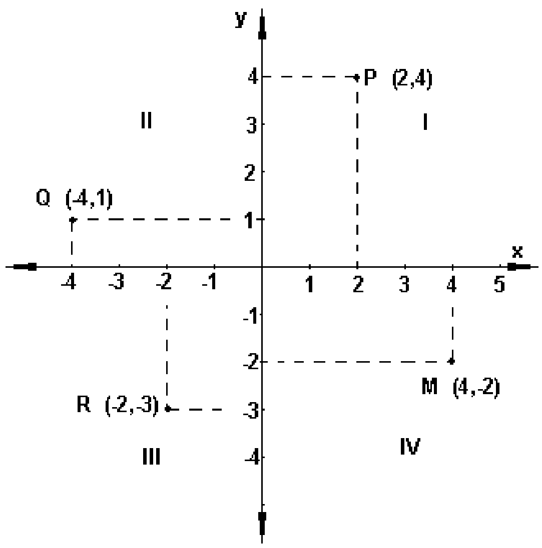


Fig. 5-1

Dado que las abscisas y las ordenadas son números reales, queda establecida una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares de números reales, es decir*: a cada punto del plano le corresponde un par de números reales y a cada par de números reales le corresponde un punto del plano.*

Esta correspondencia es el fundamento de la Geometría Analítica, es decir: la descripción geométrica a través de ecuaciones.

5.2) Transformación de coordenadas cartesianas.

5.2.1) Translación paralela de los ejes.

Si tomamos, respecto a un sistema cartesiano (x, y), un punto arbitrario O' (a, b) y por éste trazamos dos ejes (x', y') paralelos e igualmente orientados que los primeros, se dice que el nuevo sistema deriva del primero por una translación paralela.

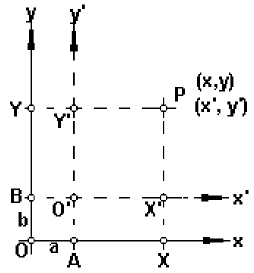


Fig. 5-2

Resulta que:

$$x = \overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX} = a + \overline{O'X'} = a + x'$$
$$y = \overline{OY} = \overline{OB} + \overline{BY} = b + \overline{O'Y'} = b + y'$$

de manera que las fórmulas denominadas inversas son

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}} \qquad (5.1)$$

De estas relaciones, se infieren las fórmulas denominadas directas

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}} \qquad (5.2)$$

5.2.2) Rotación de ejes ortogonales alrededor del origen.

Sea un sistema ortogonal (x, y) de origen O; si por él trazamos dos ejes (x', y') tales que $\hat{xx'} = \hat{yy'} = \varphi$ se obtendrá un nuevo sistema ortogonal (x'. y'), el cual se dice deriva del primero por una rotación de amplitud (φ) alrededor del origen.

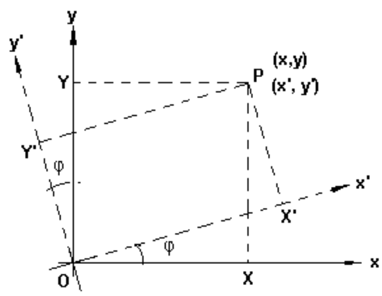


Fig. 5-3

El segmento OP, puede considerarse como la resultante de la poligonal OX'P.

Dado que la proyección de la resultante de una poligonal es igual a la suma de las proyecciones de las componentes, resulta:

$$x = \overline{OX} = proy_x \overline{OP} = proy_x \overline{OX'} + proy_x \overline{X'P}$$

o bien

$$x = proy_x \overline{OX'} + proy_x \overline{OY'}$$

pero como la proyección de un segmento sobre un eje es igual al producto del valor absoluto del segmento dado, por el coseno del ángulo de dirección, se tiene

$$\boxed{x = x'\cos\varphi - y' sen\varphi} \qquad (5.3)$$

Además

$$y = \overline{OY} = proy_y \overline{OP} = proy_y \overline{OX'} + proy_y \overline{X'P}$$

o sea

$$y = proy_y \overline{OX'} + proy_y \overline{OY'}$$

pero, por la propiedad de las proyecciones mencionadas en el párrafo anterior, resulta

$$y = x'\cos(90° - \varphi) + y'\cos\varphi$$

o bien

$$\boxed{y = x' sen\varphi + y'\cos\varphi} \qquad (5.4)$$

Las relaciones (5.3) y (5.4) son las fórmulas inversas del problema.

Para obtener las ecuaciones directas basta observar que el sistema (x', y') se pasa al (x, y) por una rotación alrededor del origen de amplitud (-φ); luego las fórmulas directas se deducen reemplazando en (5.3) y en (5.4) el argumento por (-φ).

Así

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = x\ \ cos\varphi + y\ \ sen\varphi \\ y' = -x\ \ sen\varphi + y\ cos\varphi \end{array}} \qquad (5.5)$$

5.2.3) Transformación general de coordenadas cartesianas rectangulares.

Sean (x, y), (x', y') dos sistemas de ejes ortogonales. La posición del segundo respecto del primero estará definida cuando se conozcan las coordenadas del nuevo origen O' (a, b) y el ángulo $\varphi = \hat{xx'}$ que determinan los ejes de abscisas (fig. 5-4).

Construyendo un sistema auxiliar (X, Y), se puede establecer

$$(5.6)\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \qquad (5.7)\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

y también

$$(5.8)\begin{cases} X = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi \\ Y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \qquad (5.9)\begin{cases} x' = X\ \cos\varphi + Y\ sen\varphi \\ y' = -\ X\ sen\varphi + Y\ \cos\varphi \end{cases}$$

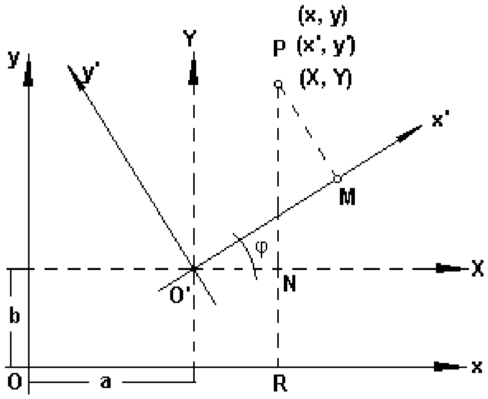


Fig. 5-4

Reemplazando (5.8) en (5.6) se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\,sen\varphi + a \\ y &= x'\,sen\varphi + y'\cos\varphi + b \end{aligned}} \qquad (5.10)$$

que son las fórmulas inversas.

Sustituyendo X e Y por sus valores (5.7) en la relación (5.9), se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\varphi + (y-b)sen\varphi \\ y' &= -(x-a)sen\varphi + (y-b)\cos\varphi \end{aligned}} \qquad (5.11)$$

que son las ecuaciones directas.

5.3) Coordenadas Polares.

Sea un punto en el origen O, denominado polo y una semirrecta $\overline{OX}$, llamada eje polar. Se fija, además, el sentido positivo de las rotaciones coincidentes con el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

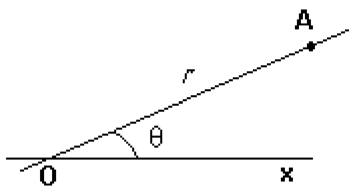


Fig. 5-5

Un punto cualquiera A del plano queda determinado al conocer la distancia OA y el ángulo θ que indica la posición del segmento OA respecto al eje. (figura 5-5)

El número positivo *r* que mide al OA se denomina radio vector del punto A. La amplitud del ángulo *θ* es la anomalía o argumento del punto dado. Las cantidades *r* y *θ* son las coordenadas polares del punto A y se simboliza

A (r, θ)

Vale decir, que a cada punto de la superficie le están coordinados biunívoca y continuamente una longitud y un ángulo, o sea dos magnitudes.

Este sistema resulta muy ventajoso para el análisis de las curvas arrolladas como los espirales, entre otras.

En general *r* puede tomar cualquier valor real positivo y *θ* cualquier valor comprendido entre 0° y 360°. (Coordenadas polares elementales)

A veces suele establecerse para las dos coordenadas el signo positivo y el negativo, como ilustra la figura 5-6 (coordenadas polares generales).

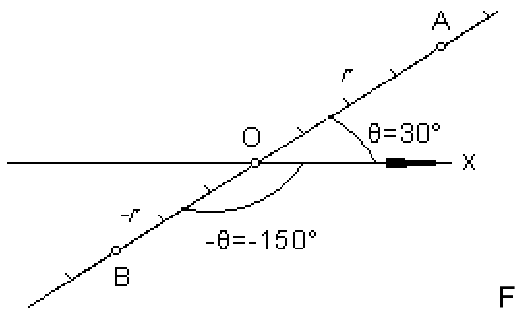


Fig. 5-6

Por lo tanto:

A(4, 30°)

B(-3, -150°)

Cuando se opera con puntos próximos al eje polar en semiplanos opuestos del mismo, se observa que corresponden diferencias notables en los argumentos, por ejemplo: los puntos (1, 5°) y (-1; 355°) son dos puntos equidistantes del eje polar por arriba y por debajo, muy próximos a él. Por ello, se admite que los radio vectores y sus argumentos varíen entre -∞ y +∞. No obstante, nosotros usaremos la primer definición: radio vector positivo y ángulo positivo en el sentido de giro antihorario.

EJERCICIO: Fijar en coordenadas polares los puntos siguientes:

(5, 75°); (7, 270°); (3, π/2); (8, π/4); (2, π/3)

5.4) Fórmulas de pasaje de las coordenadas cartesianas a polares y viceversa.

Supongamos un sistema cartesiano al cual se encuentra agregado un sistema polar, cuyo polo coincide con el origen del sistema ortogonal y cuyo eje polar se superpone al semieje positivo de abscisas.

Dado un punto P, sabemos que:

$$x = r \cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

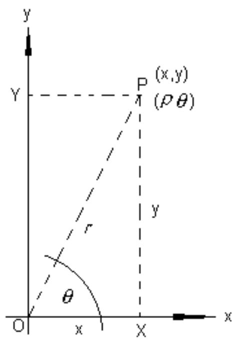


Fig. 5.7

Estas fórmulas expresan las coordenadas cartesianas del punto en función de las coordenadas polares.

Por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg\theta = \frac{y}{x}$$

que son las fórmulas que expresan las coordenadas polares en función de las cartesianas.

De la solución de este problema particular resulta luego la solución del problema general, combinando estos resultados con los que se refieren a un cambio general de ejes cartesianos (punto 5.2).

5.5) Problemas de aplicación.

1) Hallar las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas ortogonales se señalan a continuación:

A (4; 3) R. A (5; 36°50')

B (1; 1) R: B ($\sqrt{2}$; 45°)

C (6; 8) R: C (10; 53°10')

D (-1; 1) R: D ($\sqrt{2}$; 135°)

2) Calcular las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares se indican a continuación:

A (4; 45°) R: A (2 $\sqrt{2}$; 2 $\sqrt{2}$)

B (10; 30°) R: B (5 $\sqrt{3}$; 5)

C (2; 60°) R: C (1; $\sqrt{3}$)

D (5; 180°) R: D (-5; 0)

3) Determinar las ecuaciones polares de las curvas que tienen las siguientes ecuaciones cartesianas:

a) $y^2 = 2x$ R: $r = \dfrac{2.\cot ag\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

b) $x^2 - y^2 = 1$ R: $r = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta}}$

4) Hallar las ecuaciones cartesianas de las curvas cuyas ecuaciones polares son:

a) $r \cos\varphi = 10$ R: $x = 10$

b) $r = 3$ R: $x^2 + y^2 - 9 = 0$

5) Calcular las coordenadas de los puntos siguientes cuando los ejes giran alrededor del origen un ángulo θ:

a) A (0;4) y θ=60° R: A (2 $\sqrt{3}$; 2)

b) B (2 $\sqrt{2}$; 2 $\sqrt{2}$) y θ=45° R: B (4;0)

6) Calcular las coordenadas del punto P (2;5) referidas a un sistema (X' Y') de origen O' (3; -2) con respecto al sistema (X Y)

R: $x = 2 + 3 = 5$

$y = 5 - 2 = 3$

7) Calcular las coordenadas de los puntos siguientes cuando los ejes se trasladan al origen O´ y giran alrededor de él un ángulo θ:

a) A (-5; 1); O' (-4;2); θ=180° R: A (1;1)

b) B (-4; 3); O' (1;3); θ = 90° R: B (0;5)

8) El punto P tiene como coordenadas (4; 2) referidas a un par de ejes rectangulares. Si estos ejes giran un ángulo de 30° ¿cuáles son las nuevas coordenadas del punto dado?

R: P(1+2 $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ -2)

9) Determinar las nuevas coordenadas del punto M (3;4) cuando se eligen como ejes las bisectrices de los ejes primitivos.

R: $M\left[\frac{7\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

TEMA 6: VECTORES

6.1) Vectores y Escalares.

La posición de una partícula sólo puede establecerse respecto a un origen y un adecuado sistema de referencia centrado en él. La posición entonces, se establece con una flecha que une la partícula con el origen y cuya punta se encuentra en la partícula (Fig. 6.1.a).

El cambio de posición de una partícula se llama *desplazamiento*. Si una partícula se mueve de la posición A a la posición B (Fig. 6-1b), podemos representar su desplazamiento trazando una recta de A a B; el sentido del desplazamiento se puede mostrar poniendo una punta de flecha en B, indicando así que el desplazamiento fue de A a B. La trayectoria de la partícula no tiene que ser necesariamente una línea recta de A a B; la flecha representa sólo el efecto neto del movimiento, no el movimiento tal como ocurrió.

Por ejemplo, en la Fig. 6-1c dibujamos una trayectoria posible seguida por una partícula desde A hasta B. Obsérvese que la trayectoria no es la misma que el desplazamiento AB. Si tomáramos una fotografía instantánea de la partícula cuando se encontraba en A y poco después, cuando se localizara en una posición intermedia P, podríamos obtener la flecha de desplazamiento AP que representa el efecto neto del movimiento durante ese intervalo aunque no sepamos la trayectoria real seguida en esos dos puntos. Además, un desplazamiento tal como A'B' (Fig. 6-1b), que es paralelo a AB, con la misma dirección y sentido, y de igual longitud que AB, representa el mismo cambio de posición que AB. No hacemos ninguna distinción entre esos dos desplazamientos. Por consiguiente, un desplazamiento será caracterizado por una *longitud*, una *dirección* y un *sentido*, con la propiedad de trasladarse sobre la dirección y a direcciones paralelas. La longitud del vector en una escala adecuada es el módulo del mismo, el cual es un valor intrínsecamente positivo.

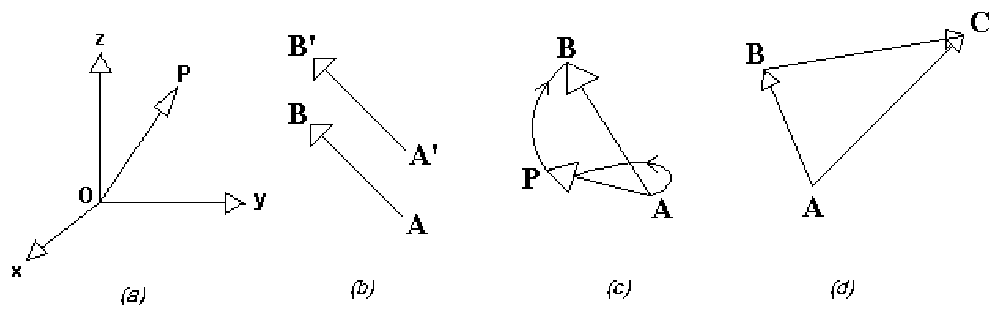


Fig. 6-1: Vectores de posición y desplazamiento. (a) Posición de P indicada por la flecha OP. (b) Las flechas AB y A'B' son idénticas puesto que tienen la misma longitud y apuntan en la misma dirección. (c) La trayectoria real de la partícula al moverse de A a B puede ser la curva indicada; el desplazamiento sigue siendo la flecha AB. Para algún punto intermedio P, el desplazamiento desde A es el vector AP. (d) Después del desplazamiento AB, la partícula sufre otro desplazamiento BC. El efecto neto de los dos desplazamientos está representado por la flecha AC.

De manera semejante, podemos representar un desplazamiento subsecuente de B a C (Fig. 6-1d). El efecto neto de los dos desplazamientos será el mismo que el de un solo desplazamiento desde A hasta C. Entonces decimos que AC es la *suma o* *resultante* de los desplazamiento AB y BC. Nótese que la suma no es una suma algebraica y que no basta sólo un número para especificarla completamente.

Las cantidades que se comportan como los desplazamientos se llaman *vectores*. Así pues, los vectores son entes que tienen módulo, dirección y sentido y se combinan de acuerdo con ciertas reglas de adición. Estas reglas se enunciarán más adelante. El vector desplazamiento puede considerarse como el prototipo y algunas otras magnitudes físicas que se representan con vectores son: fuerza, velocidad, aceleración, intensidad de campo eléctrico e inducción magnética. Muchas de las leyes de la física se pueden expresar en forma compacta usando vectores; las demostraciones en las que intervienen esas leyes a menudo se simplifican considerablemente cuando se procede así.

Las magnitudes que pueden especificarse completamente mediante un número y una unidad se llaman *escalares*. Algunas magnitudes físicas que se representan con escalares son: masa, longitud, tiempo, densidad, energía y temperatura. Los escalares se pueden manejar mediante las reglas del álgebra ordinaria.

6.2) Suma de vectores. Método geométrico.

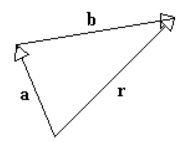
Para representar un vector en un diagrama dibujamos una flecha. Escogemos la longitud de la flecha proporcional a la magnitud del vector (esto es, escogemos una escala), y ponemos el sentido de la flecha en el sentido del vector, indicándolo en cada caso con la punta de la flecha. Por ejemplo, un desplazamiento de 40 m al noreste con una escala de 1,0 cm por cada 10 m, se representaría mediante una flecha de 4,0 cm de largo, trazada a un ángulo de 45° con respecto a la dirección horizontal y con la punta de la flecha en el extremo superior derecho de la misma. Un vector como éste se representa en forma conveniente en negritas, por ejemplo **d**. Al escribir a mano es conveniente poner una flecha sobre el símbolo para denotar una cantidad vectorial, o bien simplemente un trazo recto: $\vec{d}$ o $\bar{d}$.

A menudo sólo nos interesará la magnitud del vector y no su dirección y sentido. La magnitud de **d** se llama módulo o valor absoluto de **d**; y la representamos con la letra escrita en cursiva, es decir *d*. El símbolo en tipo de imprenta negro se entiende que representa todas las propiedades del vector: módulo, dirección y sentido.

Consideremos ahora la Fig. 6-2 en la cual hemos trazado y puesto las letras a los vectores de la Fig. 6-1d. La relación entre estos desplazamientos (vectores) se puede escribir así:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{r} \qquad (6\text{-}1)$$

Fig. 6-2: La suma vectorial **a + b = r**. Compárese con la Fig. 6-1d



Las reglas que deben seguirse para efectuar esta adición (vectorial) geométricamente son las siguientes: en un diagrama dibujado a escala se traza el vector desplazamiento **a**; después se traza **b** con su origen colocado en la punta de **a**, y se traza una recta desde el origen de **a** a la punta de **b** para construir el vector suma **r**. Este vector es un desplazamiento equivalente en longitud, dirección y sentido a los desplazamientos consecutivos **a** y **b**. Este procedimiento se puede generalizar para obtener la suma de un número cualquiera de desplazamientos consecutivos.

Puesto que los vectores son nuevos entes matemáticos, debemos esperar otras reglas para manejarlos. El símbolo "+" en la Ec. 6-1 simplemente tiene un significado diferente del que tiene en aritmética o en álgebra ordinarias. Nos indica que debe efectuarse un conjunto de operaciones diferentes.

Mediante la Fig. 6-3 podemos demostrar dos propiedades importantes de la adición de vectores:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \text{(ley conmutativa)} \tag{6-2}$$

y

$$\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} \quad \text{(ley asociativa)} \tag{6-3}$$

Estas leyes establecen que no importa en qué orden o cómo se agrupen los vectores, la suma es la misma. Al respecto, la adición vectorial y la adición escalar siguen las mismas reglas.

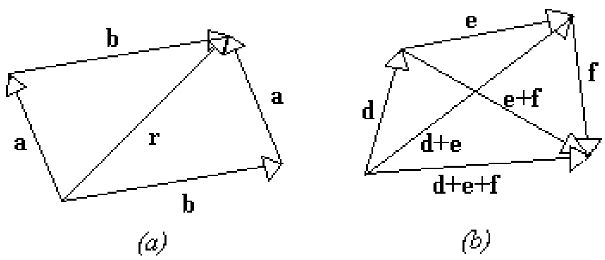


Fig. 6-3: (a) La ley conmutativa para las sumas vectoriales, que establece que **a** + **b** = **b** + **a**. (b) La ley asociativa que establece que **d** + (**e** + **f**) = (**d** + **e**) + **f**

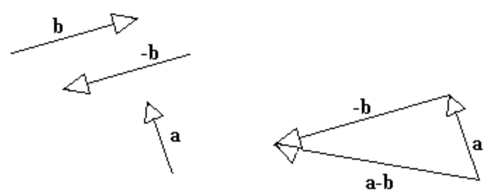
La operación de sustracción se puede escribir en nuestra álgebra vectorial definiendo como valor negativo de un vector a otro vector de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario. Entonces,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{6-4}$$

como se muestra en la Fig. 6-4.

Recuerde que, aún cuando hemos usado los desplazamientos para ilustrar estas operaciones, las reglas se aplican a *todas* las cantidades vectoriales.

Fig. 6-4: La diferencia de vectores **a – b = a + (-b)**



6.3) Descomposición y suma de vectores, método analítico.

El método geométrico de sumar vectores no es muy útil cuando tratamos con vectores en tres dimensiones; inclusive, en el caso de dos dimensiones es a menudo inconveniente. Otra forma de sumar vectores es el método analítico, que implica descomponer un vector en sus componentes con respecto a un cierto sistema de coordenadas.

La Fig. 6-5a muestra un vector cuyo origen se ha colocado en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Si llevamos perpendiculares desde la punta de **a** hacia los ejes, las cantidades a_x y a_y así formadas se llaman *componentes escalares* del vector **a.** El proceso se denomina *descomposición de un vector en sus componentes.* La Fig. 6-5 muestra un caso bidimensional muy sencillo; fácilmente se amplían sus conclusiones al caso de tres dimensiones.

Un vector puede tener muchos conjuntos de componentes. Por ejemplo, si giramos el eje de las x y el eje de las y de la Fig. 6-5a un ángulo de 10° en el sentido contrario de las manecillas del reloj, las componentes de **a** serán diferentes. Además podemos usar un sistema de coordenadas no rectangulares, esto es, el ángulo entre los dos ejes no tiene que ser forzosamente de 90°. Así pues, las componentes de un vector sólo quedan expresadas con toda precisión si especificamos el sistema de coordenadas que se está empleando. No es necesario que el origen del vector se coloque en el origen del sistema de coordenadas para encontrar sus componentes, aún cuando así lo hemos hecho para facilitar la explicación, el vector se puede mover a cualquier lugar en el espacio de las coordenadas. Mientras no cambien sus ángulos respecto a las direcciones de los ejes, sus componentes permanecerán inalteradas.

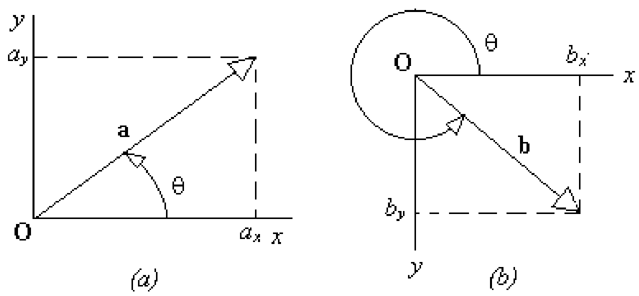


Fig. 6-5: Dos ejemplos de descomposición de un vector en sus componentes escalares en un cierto sistema de coordenadas.

Las componentes a_x y a_y de la Fig. 6-5a se encuentran fácilmente por medio de las expresiones:

$$a_x = a\ cos\theta \qquad \text{y} \qquad a_y = a\ sen\theta \tag{6-5}$$

siendo θ el ángulo que forma el vector **a** con el sentido positivo del eje de las x medido en sentido contrario a las manecillas del reloj a partir de ese eje. Nótese que, según el valor del ángulo θ, a_x y a_y pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo en la Fig. 6-5b, b_y es negativo y b_x es positivo. Las componentes de un vector tienen propiedades de escalares porque, en cualquier sistema de coordenadas de un marco de referencia determinado, sólo se necesita un número, con su signo algebraico para especificarlas.

Una vez que un vector ha quedado descompuesto en sus componentes, las componentes mismas se pueden usar para especificar el vector. En lugar de los dos números a (módulo del vector) y θ (dirección del vector con relación al eje de las x), tenemos ahora los dos números a_x y a_y Podemos pasar en un sentido y en otro de la descripción de un vector en función de sus componentes a_x y a_y, a la descripción equivalente de la magnitud y de la dirección a y θ. Para obtener a y θ de a_x y a_y , observemos en la Fig. 6-5a que

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} \qquad (6\text{-}6a)$$

y

$$\tan\ \theta = a_y/a_x \qquad (6\text{-}6b)$$

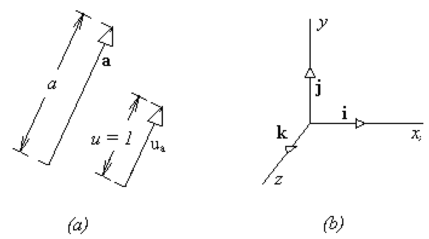
El cuadrante en que se encuentra θ queda determinado por los signos de a_x y de a_y .

Cuando descomponemos un vector en sus componentes, algunas veces es útil introducir un vector de longitud unitaria en una dirección determinada. Así, el vector **a** en la Fig. 6-6a puede escribirse, por ejemplo, de esta manera:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u_a}\, a \qquad (6\text{-}7)$$

siendo $\mathbf{u_a}$ un *vector unitario* (o *versor*) en la dirección de **a**. A menudo es conveniente emplear vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas escogidos. En el sistema de coordenadas rectangulares, ordinariamente se emplean los símbolos especiales **i, j** y **k** para vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes *x, y* y *z*, respectivamente; véase la Fig. 6-6b. Nótese que no es forzoso que **i, j** y **k** estén localizados en el origen. Como todos los vectores, se pueden trasladar a cualquier lugar en el espacio de las coordenadas con la condición que no se cambien las direcciones con respecto a los ejes de coordenadas.

Fig. 6-6: (a) El vector **a** puede escribirse $u_a a$ siendo u_a un vector unitario en la dirección de **a**. (b) Los vectores unitarios **i, j y k**, se emplean para especificar respectivamente las direcciones y sentidos positivos de los ejes x, y y z.



Los vectores **a** y **b** de la Fig. 6-5 se pueden escribir en función de sus componentes y de los vectores unitarios como sigue:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\, a_x + \mathbf{j}\, a_y \qquad (6\text{-}8a)$$

y

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}\, b_x + \mathbf{j}\, b_y \qquad (6\text{-}8b)$$

véase la Fig. 6-7. La relación vectorial obtenida por la Ec. 6-8a es equivalente a la relación escalar dada por la Ec. 6-6; ambas relacionan el vector (**a**, o bien, a y θ) con sus componentes (a_x y a_y). A cantidades tales como **i**.a_x y **j**.a_y en la Ec. 6-8a las llamaremos algunas veces las *componentes vectoriales* de **a**; éstas se han trazado como vectores en la Fig. 6-7a. La palabra *componente* seguirá empleándose para indicar las cantidades escalares a_x y a_y.

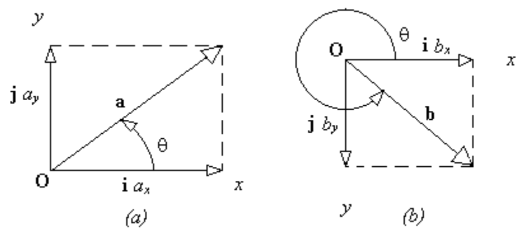


Fig. 6-7: Dos ejemplos de descomposición de un vector en sus componentes vectoriales en un sistema de coordenadas dado; compárese con la Fig. 6-5.

Consideremos ahora la adición de vectores por el método analítico. Sea **r** la suma de los dos vectores **a** y **b** que están en el plano *x*-*y*, de tal manera que

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{6-9}$$

En un sistema de coordenadas dado, dos vectores tales como **r** y **a** + **b** podrán ser iguales solamente si sus correspondientes componentes lo son, es decir,

$$r_x = a_x + b_x \tag{6-10a}$$

y

$$r_y = a_y + b_y \tag{6-10b}$$

Estas dos ecuaciones algebraicas, conjuntamente, son equivalentes a la relación vectorial única representada por la Ec. 6-9. Mediante las Ecs. 6-6 podemos encontrar *r* y el ángulo θ formado por **r** con el eje de las *x*; esto es,

$$r = \sqrt{r_x^{\;2} + r_y^{\;2}}$$

y

$$\tan\theta = r_y / r_x$$

Así pues, tenemos la siguiente regla para sumar vectores analíticamente: se descompone cada vector en sus componentes en un sistema dado de coordenadas; la suma algebraica de las componentes a lo largo de un eje determinado es la componente de la suma vectorial a lo largo de ese eje; la suma vectorial se puede reconstruir una vez que se conocen sus componentes. Este método de sumar vectores se puede generalizar a muchos vectores y a tres dimensiones.

La ventaja del método de descomponer los vectores en sus componentes en un sistema de ejes ortogonales, en lugar de sumarlos directamente aplicando las relaciones trigonométricas pertinentes, es que siempre empleamos triángulos rectángulos y así se simplifican los cálculos.

Al sumar vectores por el método analítico, la elección de los ejes de coordenadas determina la mayor o menor simplificación del proceso. Algunas veces se conocen desde un principio las componentes de los vectores con respecto a un cierto sistema de ejes, de modo que la elección de los ejes es obvia. En otros casos, una elección atinada de los ejes puede simplificar considerablemente el trabajo de descomponer los vectores en sus componentes. Por ejemplo, los ejes se pueden orientar de manera que por lo menos uno de los vectores quede paralelo a un eje.

Ejemplo 6-1. Un avión recorre 130 km en una trayectoria recta que forma un ángulo de 22,5° al este del norte. ¿Qué distancia se alejó el avión hacia el norte y qué distancia hacia el este de su punto de partida?

Escogemos como dirección este al sentido positivo del eje de las *x* y como dirección norte al sentido positivo del eje de las *y*. A continuación (Fig. 6-8) trazamos un vector de desplazamiento a partir del origen (punto de partida), formando un ángulo de 22,5° con respecto al eje de las *y* (el norte) inclinado hacia el sentido positivo del eje de las *x* (el este). Se escoge la longitud del vector de manera que represente una magnitud de 130km. Si llamamos **d** a este vector, entonces d_x da la distancia recorrida hacia el este del punto de partida y d_y proporciona la distancia recorrida hacia el norte del punto de partida. Tenemos:

$$\theta = 90{,}0° - 22{,}5° = 67{,}5°$$

de manera que (véanse las Ecs. 6-5):

$$d_x = d \ \cos\ \theta = (130km) \ \ \cos\ 67{,}5° = 50km$$

y

$$d_y = d \ sen\ \theta = (130km) \ \ sen\ 67{,}5° = 120km$$

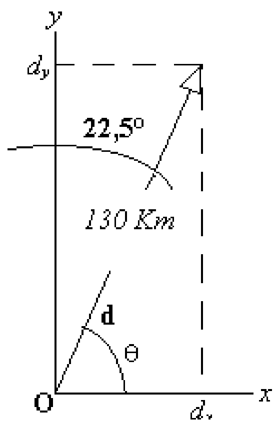


Fig. 6-8 (Ejemplo 6-1)

Ejemplo 6-2. Un automóvil recorre 30km hacia el este en una carretera horizontal. Al llegar al cruce de carreteras da la vuelta hacia el norte, recorre 40km. y se detiene. Encontrar el desplazamiento resultante del automóvil.

Escogemos un marco de referencia fijo con respecto a la tierra, con el sentido positivo del eje de las *x* de nuestro sistema de coordenadas apuntando hacia el este y con el sentido positivo del eje de las *y* dirigido hacia el norte. Se dibujan los dos desplazamientos consecutivos **a** y **b**, como se muestra en la Fig. 6-9. El desplazamiento resultante **r** se obtiene así: **r** = **a** + **b**.

Puesto que **b** no tiene componente sobre el eje de las *x* y **a** carece de componente sobre el eje de las *y*, obtenemos (véanse las Ecs. 6-10):

$$r_x = a_x + b_x = 30km + 0 = 30km$$

$$r_y = a_y + b_y = 0 + 40km = 40km$$

Entonces, la magnitud y dirección de **r** son (véanse las Ecs.6-6):

$$r = \sqrt{r_x^{\,2} + r_y^{\,2}} = \sqrt{(30km)^2 + (40km)^2} = 50km$$

$$\tan\theta = r_y/r_x = \frac{40km}{30km} = 1{,}33 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1{,}33) = 53°$$

El vector de desplazamiento resultante **r** tiene una magnitud de 50km y forma un ángulo de 53° al norte del este.

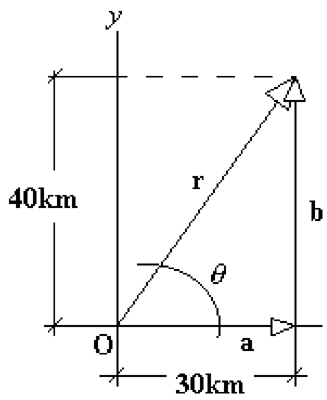


Fig. 6-9 (Ejemplo 6-2)

Ejemplo 6-3. Tres vectores coplanares con respecto a un determinado sistema de coordenadas rectangulares con un cierto origen, se expresan como sigue:

a = 4**i** – **j**

b = -3**i** + 2**j**

c = –3**j**

en las cuales las componentes se dan en unidades arbitrarias. Encuéntrese el vector **r** que es la suma de estos vectores.

De la ecs. 6-10 tenemos:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4 - 3 + 0 = 1$$

y

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1 + 2 - 3 = -2$$

Así pues,

r = **i** r_x+ **j** r_y = **i** – 2 **j.**

La Fig. 6-10 muestra los cuatro vectores. De las Ecs. 6-6 podemos calcular que la magnitud de **r** es $\sqrt{5}$ y que el ángulo que forma **r** con respecto a la parte positiva del eje de las *x*, medido en un sentido contrario a las manecillas del reloj, a partir de dicho eje, es:

$$\tan^{-1}(-2/1) = 297°$$

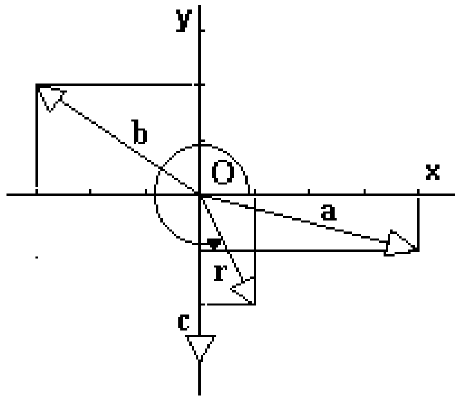


Fig. 6-10 (Ejemplo 6-3)

6.4) Multiplicación de vectores.

Hemos supuesto en los estudios anteriores que los vectores que se suman son de la misma naturaleza; esto es, que vectores de desplazamiento se suman a vectores de desplazamiento, o vectores de velocidad se suman con vectores de velocidad. Así como carecería de sentido sumar magnitudes escalares de diferente naturaleza, tales como la masa y la temperatura, también carece de sentido sumar magnitudes vectoriales de diferente naturaleza, tales como un desplazamiento y una fuerza.

Ahora bien, lo mismo que los escalares, se pueden multiplicar vectores de diferente naturaleza unos con otros para obtener magnitudes de nuevas dimensiones físicas. Como los vectores tienen módulo, dirección y sentido, la multiplicación de vectores no puede ajustarse exactamente a las mismas reglas que las reglas algebraicas de la multiplicación escalar. Debemos establecer otras nuevas para la multiplicación de vectores.

Encontramos útil definir tres clases de operaciones de multiplicación de vectores: 1) multiplicación de un vector por un escalar, donde el resultado es un vector; 2) multiplicación de dos vectores de tal manera que se obtenga un escalar, y 3) multiplicación de dos vectores de forma que se obtenga otro vector. Hay todavía otras posibilidades, pero no las consideraremos aquí.

La multiplicación de un vector por un escalar tiene un significado sencillo: el producto de un escalar *k* y un vector **a** se escribe *k***a** y se define como un nuevo vector cuya magnitud es *k* veces mayor que la magnitud de **a**. El nuevo vector tiene el mismo sentido que **a** si *k* es positivo y sentido opuesto, si *k* es negativo. Para dividir un vector entre un escalar, simplemente se multiplica el vector por el recíproco del escalar. Este tipo de producto ya lo hemos usado cuando definimos los vectores en términos de versores (ver Ec. 6-7).

Cuando se multiplica una cantidad vectorial por otra cantidad vectorial, se debe distinguir entre el *producto escalar* (que se representa con un *punto*) y el *producto vectorial* (que se representa con una *cruz*). El producto escalar de dos vectores **a** y **b** se escribe **a** • **b** y se define así:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a\, b \cos \phi \qquad (6\text{-}11)$$

siendo *a* la magnitud del vector **a**, *b* la magnitud del vector **b**, y ϕ el ángulo que forman los dos vectores. (véase la Fig. 6-11).

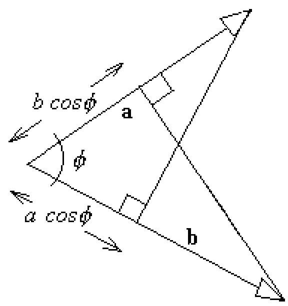


Fig. 6-11: El producto escalar **a • b =** a b cosϕ es el producto de la magnitud de cualquiera de los vectores (digamos el a) por la componente del otro vector en la dirección del primer vector (digamos b cosϕ)

Puesto que *a* y *b* son escalares y *cos*ϕ es un número adimensional, el *producto escalar de dos vectores es un escalar.* El producto escalar de dos vectores se puede considerar como el producto de la magnitud de un vector y la componente del otro vector en la dirección del primero. Debido a la notación **a** • **b** algunas veces en lugar de decir producto escalar de **a** y de **b** se dice simplemente "**a** punto **b**" o también producto interno de **a** y **b**. Asimismo por definición, el producto escalar es conmutativo, es decir **a • b = b • a**.

Se hubiera podido definir a **a** • **b** como cualquier operación a nuestro arbitrio, por ejemplo, $a^{1/3}\, b^{1/3} \tan(\phi/2)$, pero tal definición no hubiera sido de ninguna utilidad para nosotros en Física. Con nuestra definición del producto escalar, un buen número de magnitudes físicas importantes se pueden describir como el producto escalar de dos vectores. Algunas de ellas son, por ejemplo, trabajo mecánico, potencial eléctrico, potencia eléctrica, y densidad de energía electromagnética. Cuando estudiemos posteriormente estas magnitudes, señalaremos su relación con el producto escalar de vectores.

Por otra parte siempre que hablamos de proyecciones de una dirección sobre otra, podemos simbolizar dicha operación a través de un producto escalar.

El *producto vectorial* de dos vectores **a** y **b** se escribe **a** x **b** y es otro vector **c**, siendo **c** = **a** x **b**. El *módulo* de **c** se define como:

$$c = a\ b\ sen\ \phi, \tag{6-12}$$

donde ϕ es el menor ángulo formado entre las direcciones de **a** y **b**.

La *dirección* de **c**, que es el producto vectorial de **a** y de **b**, se define como perpendicular al plano formado por **a** y **b**. Para especificar el sentido del vector **c** debemos referirnos a la Fig. 6-12. Imaginémonos un tornillo derecho cuyo eje sea perpendicular al plano formado por a y b de tal manera que gire *de* **a** a **b**, el ángulo ϕ que forman los dos vectores. Entonces la dirección y el sentido en que avanza el tornillo da la dirección y el sentido del producto vectorial **a** x **b** (Fig. 6-12a). Otra forma conveniente de obtener la dirección y sentido de un producto vectorial es la siguiente: imagínese un eje perpendicular al plano **a** x **b** que pase por su origen común, si se cierran los dedos de la *mano derecha* alrededor de ese eje como empujando al vector **a** hacia el vector **b** con la punta de los dedos haciendo girar el más pequeño de los ángulos que forman, la dirección y sentido del pulgar extendido da la dirección y el sentido del producto **a** x **b** (Fig. 6.12b). Debido a la notación, el producto vectorial **a** x **b** se lee a veces "**a** cruz **b**".

Nótese que **b** x **a** no es el mismo vector que **a** x **b**, de modo que el orden de los factores en un producto vectorial es importante. No ocurre lo mismo con los escalares por que el cambio del orden de los factores en álgebra o en aritmética no afecta el producto resultante. En realidad, **a** x **b** = **- b** x **a** (Fig. 6-12b y c). Esto se puede deducir del hecho que la magnitud *ab sen*ϕ es igual a la magnitud *ba sen*ϕ, pero el sentido de **a** x *b* es opuesto al de **b** x **a**; esto es debido a que el tornillo derecho avanza en un sentido cuando se gira un ángulo ϕ de **a** a **b**, pero avanza en sentido contrario cuando el ángulo ϕ se gira de **b** a **a**. El estudiante puede llegar al mismo resultado aplicando la regla de la mano derecha.

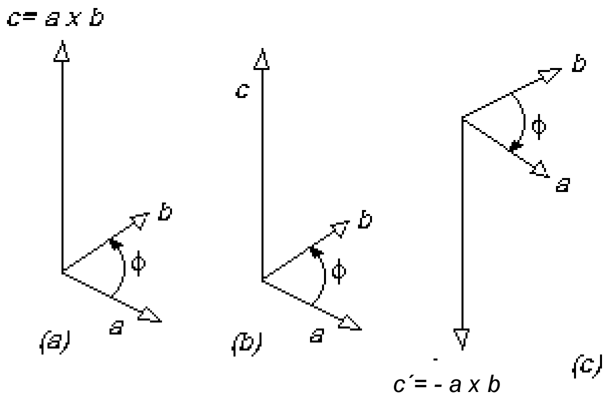


*Fig. 6-12: El producto vectorial. (a) En **c** = **a** x **b**, el sentido de **c** es aquel en el cual avanza un tornillo derecho cuando se hace girar de **a** a **b** el ángulo más pequeño. (b) La dirección de **c** se puede obtener también con la "regla de la mano derecha": si se coloca la mano derecha de tal manera que los dedos cerrados sigan la rotación de **a** a **b**, el pulgar extendido apunta en la dirección de **c**. (c) El producto vectorial cambia de signo cuando se invierte el orden de los factores: **a** x **b** = **-b** x **a**.*

Si ϕ vale 90°, **a**, **b** y **c** (= **a** x **b**) son perpendiculares entre sí y dan las direcciones de un sistema tridimensional de coordenadas derecho. Esto es: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c},\ \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\ \ y\ \ \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

La razón para definir el producto vectorial de esta manera es que resulta de utilidad para Física. A menudo encontramos magnitudes físicas que son vectores cuyo producto, definido en la forma anterior, es una magnitud vectorial que tiene un significado físico importante. Algunos ejemplos de magnitudes físicas que son productos vectoriales son: el momento de torsión, la cantidad de movimiento angular, la fuerza sobre una carga que se mueve en un campo magnético y el flujo de energía electromagnética. Cuando estudiemos estas magnitudes posteriormente, indicaremos su relación con el producto vectorial de vectores.

El producto escalar es el más sencillo de los productos entre dos vectores. El orden de multiplicación no altera al producto. El producto vectorial es el siguiente caso más sencillo. En este caso, el orden de multiplicación sí afecta al producto, pero sólo por un factor de –1, lo cual implica un cambio de sentido. Hay otros productos de vectores que son útiles, pero resultan más complicados. Por ejemplo, un tensor se puede generar multiplicando cada una de las tres componentes de un vector por las tres componentes de otro vector. Por consiguiente, un tensor (de segundo rango) tiene nueve números asociados con él, un vector tiene tres y un escalar sólo uno. Algunas magnitudes físicas que se pueden representar mediante tensores son: esfuerzos mecánicos y eléctricos, momentos y productos de inercia, y deformaciones. Hay todavía posibilidad de cantidades físicas más complejas, sin embargo, sólo nos ocuparemos de escalares y vectores.

6.5) Vectores y las leyes de la Física.

Los vectores han resultado ser útiles en Física. Será conveniente profundizar un poco más la razón de esto. Supongamos que tenemos tres vectores **a**, **b** y **r**, que tienen las componentes a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z; y r_x, r_y, r_z respectivamente, en un cierto sistema de coordenadas *xyz* de nuestro marco de referencia. Supongamos, además, que los tres vectores están relacionados de tal manera que

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \qquad (6\text{-}13)$$

Como un simple corolario de las Ecs. 6-10, esto significa que

$$r_x = a_x + b_x; \qquad r_y = a_y + b_y; \qquad r_z = a_z + b_z \qquad (6\text{-}14)$$

Consideremos ahora otro sistema de coordenadas *x'y'z'* que tiene estas propiedades: 1) su origen no coincide con el origen del primer sistema, o sea, del sistema *xyz*, y 2) sus tres ejes no son paralelos a los ejes correspondientes al primer sistema. En otras palabras, el segundo sistema de coordenadas ha sido *transladado* y *girado* con respecto al primero.

Las componentes de los vectores **a**, **b** y **r** en nuestro sistema serían, en general, diferentes; podemos representarlas por $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, $b_{x'}$, $b_{y'}$, $b_{z'}$; y $r_{x'}$, $r_{y'}$, $r_{z'}$, respectivamente. Sin embargo estas nuevas componentes están relacionadas en la siguiente forma:

$$r_{x'} = a_{x'} + b_{x'}; \qquad r_{y'} = a_{y'} + b_{y'}; \qquad r_{z'} = a_{z'} + b_{z'} \qquad (6\text{-}15)$$

Esto es, en el nuevo sistema encontraríamos nuevamente (véase la Ec. 6-13) que

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

En un lenguaje más formal: *Las relaciones entre los vectores*, de las cuales la Ec. 6-13 es sólo un ejemplo, *son invariantes* (es decir, *no se alteran*) *con respecto a la translación o a la rotación de las coordenadas.* Ahora bien, es un hecho de la experiencia que los experimentos en que se fundan las leyes de la física y de hecho *las leyes de la física misma*, en forma semejante, quedan inalteradas cuando giramos o trasladamos el sistema de referencia. Así pues, el lenguaje de los vectores es un lenguaje ideal para expresar las leyes de la física. Si podemos expresar una ley en forma vectorial, queda asegurada la invariancia de la ley para la translación y la rotación del sistema de coordenadas por esta propiedad puramente geométrica de los vectores.

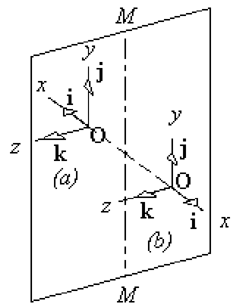


Fig. 6-13: En esta figura se muestra en (a) un sistema de coordenadas izquierdo y en (b) un sistema de coordenadas derecho. Nótese que el sistema de la mano derecha (b) y el de la mano izquierda (a) están relacionados entre sí en forma tal que se puede considerar el uno como la imagen del otro en el espejo MM. La "mano" de un sistema de coordenadas no se puede cambiar girándolo. Nótese que en (b), **i** x **j** = **k**, en tanto que en (a) **i** x **j** = -**k**.

Hasta aproximadamente 1956 se creyó que todas las leyes de la física eran invariantes bajo otra clase de transformación de coordenadas: la sustitución de un sistema de coordenadas de mano derecha por un sistema de mano izquierda. (Véase Fig. 6-13). Sin embargo, en ese año se estudiaron algunos experimentos relacionados con la desintegración de ciertas partículas subatómicas elementales en los cuales se encontró que el resultado del experimento sí dependió de la "mano" del sistema de coordenadas que se usara para expresar los resultados. En otras palabras, ¡el experimento y su imagen en un espejo darían resultados diferentes!. Este resultado sorprendentemente condujo a examinar todo lo relativo a la simetría de las leyes de la Física, y estos estudios todavía siguen siendo de los que más desafían a la Física moderna.

6.6) Preguntas para el repaso.

1. Dos vectores de diferentes magnitudes, ¿se pueden combinar para dar una resultante cero? ¿Se puede verificar lo mismo con tres vectores?

2. ¿Puede valer cero un vector si una de sus componentes no es cero?

3. ¿Tiene algún sentido llamar vector a una cantidad si su magnitud es cero?

4. Enumere varias cantidades escalares. El valor de una cantidad escalar, ¿depende del marco de referencia escogido?

5. Podemos ordenar diversos sucesos en el tiempo. Por ejemplo, el suceso *b* puede preceder al suceso *c* pero seguir al suceso *a*, dándonos un ordenamiento *a*, *b*, *c*, en el tiempo en que ocurren los sucesos. Por consiguiente, hay un sentido en el tiempo que distingue el pasado, del presente y el futuro. Por lo tanto, ¿es el tiempo un vector?. Si no lo es, ¿por qué no?

6. Las leyes conmutativa y asociativa, ¿se aplican a la substracción de vectores?

7. Un producto escalar, ¿puede ser una cantidad negativa?

6.7) Problemas de aplicación.

1) Considérense dos desplazamientos, uno de magnitud 3m y otro de magnitud 4m. Indicar cómo pueden combinarse estos vectores de desplazamiento para obtener un desplazamiento resultante de magnitud: (a) 7m; (b) 1m; (c) 5m.

R: (a) paralelo, (b) antiparalelo, (c) perpendicular.

2) Dos vectores **a** y **b** tienen magnitudes iguales, digamos 10 unidades. Están orientados en el plano xy como se muestra en la Fig. 6-14 y su suma vectorial es **r**. Encontrar (a) las componentes de **r** sobre el eje de las *x* y de las *y*; (b) la magnitud de **r**; (c) el ángulo que forma **r** con el eje de las *x*.

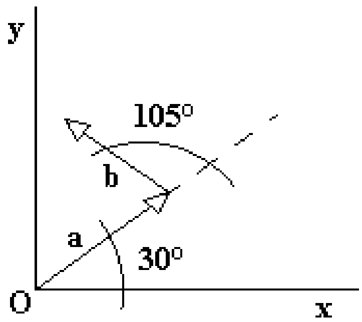


Fig 6-14

3) Dado dos vectores **a = 4i - 3j** y **b = 6i + 8j**, encontrar la dirección y magnitud de **a**, de **b**, de **a + b**, de **b - a**, y de **a - b**.

R: Las magnitudes son: 5; 10; 11,2; 11,2; 11,2.

Los ángulos formados con el eje de las x son: 323°; 53,1°; 26,5°; 79,7° y 260°.

4) Un automóvil recorre hacia el este una distancia de 50 km, después, hacia el norte, 30 km y luego, en dirección 30° al este del norte, 25 km. Trazar el diagrama de vectores y determinar el desplazamiento total del automóvil medido desde su punto de partida.

R: 81km; 39,5°; N del E.

5) Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos en un plano, como sigue: 4,0 m al suroeste, 5,0 m al este, 6,0 m en una dirección 60° al norte del

este. Escoger el eje de las *y* apuntando al norte y el de las *x* dirigido al este para obtener: (a) las componentes de cada desplazamiento, (b) las componentes del desplazamiento resultante, (c) la magnitud, dirección y sentido del desplazamiento resultante, y (d) el desplazamiento que se requeriría para regresar la partícula al punto de partida.

R: (a) a_x=-2,8 m; a_y=-2,8 m; b_x=5,0 m; b_y=0; c_x=3,0 m; c_y=5,2 m. (b) d_x=5,17 m; d_y=2,37 m. (c) 5,69 m; 24,6°; N del E. (d) 5,69 m; 24,6°; S del O.

6) Una vez que llega al césped, un jugador de golf necesita dar tres golpes a su bola para meterla. El primer golpe mueve la bola 3,66 m al norte, el segundo la mueve 1,83 m al sureste y el tercero, 0,91 m al suroeste. ¿Qué desplazamiento se hubiera necesitado para meter la bola al hoyo en el primer golpe?.

R: 1,84 m a 69,3º

7) Encontrar la suma de los vectores desplazamiento c y d cuyas componentes en Km según las tres direcciones perpendiculares son: $c_x = 5{,}0;$ $c_y = 0;$ $c_z = -2{,}0;$ $d_x = -3{,}0;$ $d_y = 4{,}0;$ $d_z = 6{,}0.$

R: r_x=2,0 km; r_y=r_z=4,0 km.

8) Use una escala de 2 m por centímetro y sume gráficamente los desplazamientos del problema 5. Determine de su *gráfica* el módulo, dirección y sentido de la resultante.

9) Las dimensiones de un cuarto son 10 pies x 12 pies x 14 pies. Una mosca que sale de una esquina llega a la esquina diagonalmente opuesta. (a) ¿cuál es la magnitud de su desplazamiento?, (b) ¿podría ser la longitud de esta trayectoria menor que esta distancia?, ¿podría ser mayor?, ¿podría ser igual?, (c) escoger un sistema de coordenadas adecuado y calcular las componentes del vector de desplazamiento en ese marco de referencia.

R: (a) 21 pies (b) puede ser mayor o igual pero no menor. (c) 10**i**+12**j**+14**k** para una cierta selección de ejes.

10) (a) Una persona sale por la puerta principal de su casa, camina 304,9 m hacia el este, 609,7 m hacia el norte, y después toma una moneda de su bolsillo y la deja caer en un acantilado de 152,4 m de altura. Establecer un sistema de coordenadas y escribir una expresión para el desplazamiento de la moneda, empleando vectores unitarios. (b) La persona regresa en seguida a la puerta de su casa, siguiendo un camino diferente en el viaje de retorno, ¿cuál es su desplazamiento resultante para el viaje completo de ida y vuelta?.

R: 0

11) En el problema 9, si la mosca no volara sino que caminara, ¿cuál sería la longitud de la trayectoria más corta que pudiera seguir?.

12) Una topógrafa calcula el ancho de un río mediante el siguiente método: se para directamente frente a un árbol en el lado opuesto y camina 100 m a lo largo de la ribera del río, después mira el árbol. El ángulo que forma la línea que parte de ella y termina en el árbol es de 35,0°. ¿Cuál es el ancho del río?.

R: 70,0 m.

13) Un avión vuela 200 km rumbo al oeste desde la ciudad A hasta la ciudad B y después 300 km en la dirección de 30° al noroeste de la ciudad B hasta la ciudad C. Determine a) En línea recta, ¿qué tan lejos está la ciudad C de la ciudad A?, b) respecto a la ciudad A, ¿en qué dirección está la ciudad C?

R: 484 km dirección 18º3'37,7'' al norte del este

14) Un avión vuela desde su campamento base hasta el lago A, a una distancia de 280 km en dirección 20,0° al noreste. Después de dejar caer provisiones, vuela hacia el lago B, ubicado a 190 km y 30,0° al noroeste del lago A. Determine gráficamente la distancia y la dirección del lago B al campamento base.

R: 310 km a 57° suroeste.

15) Un peatón camina 6,00 km al este y después 13,0 km al norte. Con el método gráfico determine la magnitud y la dirección del vector desplazamiento resultante.

R: 14 km, 65,22º

16) Una persona camina la mitad de una trayectoria circunferencial de radio 5,00 m. a) Encuentre la magnitud del vector desplazamiento. b) ¿qué distancia camina la persona?. c) ¿cuál es la magnitud del desplazamiento si la persona camina todo el recorrido alrededor de una circunferencia?

R: (a) 10,0 m; (b) 15,7 m; (c) 0

17) El vector **a** tiene una magnitud de 8,00 unidades y con el eje x positivo forma un ángulo de 45,0°. El vector **b** también tiene una magnitud de 8,00 unidades y está dirigido a lo largo del eje x negativo. Con los métodos gráficos encuentre, *a)* el vector suma **a** + **b**, y *b)* el vector diferencia **a** – **b**.

18) Una montaña rusa se mueve 200 pies horizontalmente y después viaja 135 pies en un ángulo de 30,0° sobre la horizontal. Luego recorre 135 pies en un ángulo de 40,0° abajo de la horizontal.¿Cuál es su desplazamiento después de su punto de partida?. Utilice técnicas gráficas.

R: 420 pies a –2,62°

19) Una fuerza $\mathbf{F_1}$ de magnitud igual a 6,00 unidades actúa en el origen en una dirección 30,0° sobre el eje *x*. Una segunda fuerza $\mathbf{F_2}$ de magnitud 5,00 unidades actúa en el origen en la dirección del eje *y* positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y dirección de la fuerza resultante $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$.

20) El conductor de un automóvil maneja 3,00 km hacia el norte, 2,00 km al noreste (45,0° al este del norte), 4,00 km al oeste y después 3,00 km al sureste (45,0° al este del sur). ¿Dónde termina respecto a su punto de inicio?. Represente su respuesta en forma gráfica. Compruébela usando componentes.

21) Una persona camina 25,0° al norte del este recorriendo 3,10 km. ¿Cuánto tendría que caminar hacia el norte y hacia el este para llegar al mismo sitio?.

R: hacia el norte: 1,31 km, hacia el este 2,8 km

22) Un vector tiene una componente x de –25,0 unidades y una componente y de 40,0 unidades. Encuentre la magnitud y dirección de este vector.

R: 47,2 unidades a 122°

23) Al explorar una cueva, una espeleóloga aficionada comienza en la entrada y recorre las siguientes distancias: se desplaza 75,0 m al norte, 250 m al este, 125 m en un ángulo de 30,0° al norte del este y 150 m al sur. Encuentre el desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

R: 358 m en una dirección de -2º

24) Dados los vectores **a** = 2,0**i** + 6,0**j** y **b** = 3,0**i** – 2,0**j**, *a)* dibuje el vector suma **c**= **a**+**b** y el vector diferencia **d**= **a**–**b**. *b)* Encuentre soluciones analíticas para **c** y **d** primero en términos de vectores unitarios y después en coordenadas polares, con ángulos medidos respecto del eje +*x*.

R: (b) 5**i**+4**j**=6,40 a 38,7°; -**i**+8**j**=8,06 a 97,2°

25) Un vector de desplazamiento en el plano *xy* tiene una magnitud de 50,0 m y está dirigido en un ángulo de 120,0° en relación con el eje x positivo. ¿cuáles son las componentes rectangulares de este vector?

R: x = -25 m, y = 43,3 m

26) El vector **a** tiene componentes *x* y *y* de –8,7cm y 15cm, respectivamente; el vector **b** tiene componentes *x* y *y* de 13,2cm y –6,6cm, respectivamente. Si **a**-**b**+3**c**=0, ¿cuáles son las componentes de **c**?

R: **c** = 0**i** + 0**j**

27) Un muchacho corre 3,0 cuadras al norte, 4,0 cuadras al noreste y 5,0 cuadras al oeste. Determine la longitud y dirección del vector desplazamiento que va del punto de partida hasta su posición final.

R: 6,21 cuadras con una dirección de 22,65º al oeste del norte

28) Obtenga expresiones analíticas para los vectores de posición con coordenadas polares *a)* 12,8m, 150°; *b)* 3,30cm; 60° y *c)* 22,0pulg., 215°.

R: (a) (-11,1m)**i**+(6,40m)**j;** (b) (-1,65cm)**i**+(1,86cm)**j;** (c) (-18,0in)**i**-(12,6in)**j**

29) Un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpe, corre hacia atrás 10 m y después corre 15 m en paralelo a la misma línea de golpe. En este punto, lanza un pase recto de 50 yardas dentro del campo perpendicular a la línea de golpe. ¿cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón de fútbol?.

R: 41,23 m

30) Una partícula efectúa los siguientes desplazamientos consecutivos: 3,50 m al sur; 8,20 m al noreste y 15,0 m al oeste. ¿cuál es el desplazamiento resultante?

R: 9,48 m a 166°

31) Un golfista novato necesita tres golpes para hacer un hoyo. Los desplazamientos sucesivos son 4,00 m hacia el norte, 2,00 m al noreste y 1,00 m, 30,0° al oeste del sur. Si empezara en el mismo punto inicial, ¿cuál sería el desplazamiento más sencillo que un golfista experto necesitaría para hacer el hoyo?

R: 4,64 m con una dirección de 78,56º

32) Una partícula lleva a cabo dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120,0° con el eje x positivo. El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35,0° respecto del eje x positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

R: 196 cm a –14°40´56´´

33) Las instrucciones para descubrir un tesoro enterrado son las siguientes: ir 75 pasos a 240°, girar hasta 135° y caminar 125 pasos, después caminar 100 pasos a 160°. Determine el desplazamiento resultante desde el punto de partida.

R: 29 pasos a 235°33´32,7´´

34) Al pasar sobre la isla Gran Bahama el ojo de un huracán se mueve con una dirección 60,0° al norte del oeste con una velocidad de 41,0 km/h. Tres horas después se desvía hacia el norte y su velocidad se reduce a 25,0 km/h. ¿a qué distancia se encuentra el ojo del huracán 4,50 h después de que pasa por la isla?

R: 156,6 km

35) Un avión que parte desde el aeropuerto A vuela 300 km al este, después 350 km, 30,0° al oeste del norte, luego 150 km al norte para llegar finalmente al aeropuerto B. *a)* El día siguiente, otro avión vuela directamente de A a B en línea recta. ¿en qué dirección el piloto debe viajar en este vuelo directo?, *b)* ¿qué distancia de la isla recorrerá el piloto en este vuelo directo?

R: a) 74,6º , b) 470 km

36) Muestre que **A** • **B** = $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$. (Sugerencia: Escriba A y B en forma de vectores unitarios).

37) Para **A** = 4**i** + 3**j** y **B** = -**i** + 3**j**, encuentre a) **A** • **B**, y b) el ángulo entre **A** y **B**.

R: a) 5 , b) 71,5º

38) El vector **A** se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (7, 70°) y el vector **B** se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (4, 130°). Encuentre **A** • **B**

R: 14

39) Un vector **a** de 10 unidades de magnitud y otro vector **b** de 6 unidades de magnitud apuntan en direcciones que forman un ángulo de 60°. Encontrar (a) el producto escalar de los vectores y (b) el producto vectorial de los mismos.

R: (a) Escalar de magnitud 30 $(\text{unidades})^2$; (b) Vector de magnitud 52 unidades^2, perpendicular al plano formado por **a** y **b**.

40) El vector **A** tiene una magnitud de 5,00 unidades y **B** tiene una magnitud de 9,00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50,0° entre sí. Determine **A** • **B**.

R: 29

41) Para **A** = 3**i** + j – **k**, **B** = -**i** + 2**j** + 5**k**, **C** = 2**j** – 3**k**, encuentre **C** • (**A** • **B**).

R: $0\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$

42) El vector **A** tiene 2,0 unidades de largo y apunta en la dirección *y* positiva. El vector **B** tiene una componente *x* negativa de 5,0 unidades de largo, una componente *y* positiva de 3,0 unidades de largo y no tiene componente *z*. Encuentre **A** • **B** y el ángulo entre los vectores.

R: modulo = 6 ,ángulo = 59º

43) Con la utilización del producto escalar encuentre los ángulos entre: a) **A** = 3**i** - 2**j** y **B** = 4**i** - 4**j**; b) **A** = -2**i** + 4**j** y **B** = 3**i** - 4**j** + 2**k**; c) **A** = **i** - 2**j** + 2**k** y **B** = 3**j** + 4**k**.

R: a) 11,3º, b) 156º, c) 82,3º

44) a) Determinar el vector unitario que es paralelo al vector $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$.

b) Determinar el componente del vector **A** = 2**i** – **j** - **k** en la dirección del vector **A** = 3**i** + 4**j**.

45) Los vectores **A**, **B** y **C** forman un triángulo como indica la figura. El ángulo formado entre A y B es θ, los vectores están relacionados por la expresión **C** = **A** – **B**. Calcular el producto **C . C** en función de A, B y θ y deducir la ley de los cosenos, $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

46) Demuestre que en términos de las componentes, la expresión de **A x B** es : $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{k}$

47) Dos vectores están dados por **A** = -3**i** + 4**j**, y **B** = 2**i** + 3**j**. Encuentre a) **A x B** y b) el ángulo entre **A** y **B**.

R: a) –17**k**, b) 70,5º

48) Demostrar que la magnitud de un producto vectorial da numéricamente el área del paralelogramo formado por los dos vectores componentes como los lados. (Fig. 6-15). ¿Sugiere esto la idea de cómo representar mediante un vector un elemento de área orientado en el espacio?

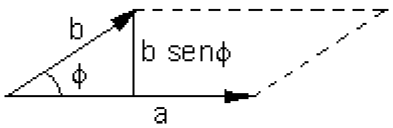


Fig. 6-15

49) Demostrar que **a**.(**b** x **c**) es numéricamente igual al volumen del paralelepípedo formado sobre los tres vectores **a**, **b** y **c**.

50) Un estudiante afirma que ha encontrado un vector **A** tal que (2**i** -3**j** + 4**k**) **x A** = (4**i** + 3**j** - **k**). ¿Cree usted que esto es cierto?. Explique.

R: no, porque debería ser perpendicular al vector 2**i**-3**j**+4**k**

51) El vector **A** apunta en la dirección *y* negativa y el vector **B** apunta en la dirección *x* negativa. ¿Cuáles son las direcciones de a) **A x B** y b) **B x A**?

52) Si |**A x B**| = **A . B** ¿Cuál es el ángulo entre **A** y **B**?

R: 45º

53) Dos vectores A y B poseen el mismo módulo. Su producto vectorial alcanza su módulo máximo cuando A y B son: a) paralelas, b) iguales, c) perpendiculares, d) antiparalelas, e) forman entre si un ángulo de 45º.

R: c

54) Si **A** = 4**i**, B_z = 0, |**B**| = 5 y **A x B** =12**k**, determinar **B**.

55) Si **A** = 3**j**, **A x B** = 9**i**, **A . B** = 12, determinar **B**.

BIBLIOGRAFIA

- Tajani M. M., Vallejos M. J., "Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica", Cesarini Hnos. Editores, 2° edición 1964.

- Tajani M. M., Vallejos M. J., "Geometría y Trigonometría", Cesarini Hnos. Editores, 20° edición 1980.

- Tajani M. M., Vallejos M. J., "Geometría", Cesarini Hnos. Editores, 28° edición 1981.

- Resnick R., Halliday D., "Física", Parte I, Editorial CECSA, 1° edición en español de la 2º edición en inglés, 1972.

- Sullivan M., "Trigonometría y Geometría Analítica", Editorial Prentice Hall, 4° edición 1997.

- Serway R., "Física", Editorial Mc Graw Hill, Tomo 1, 4° edición 1999.

- Tipler P. A., "Física para la Ciencia y la Tecnología", Editorial Reverté S.A., Tomo 1, 4° edición 2001.

INDICE

HACIA LOS VECTORES. UN CURSO PREPARATORIO PARA FÍSICA UNIVERSITARIA, ESTÁ ORIENTADO A QUE LOS ALUMNOS INGRESANTES A CARRERAS DE INGENIERÍA CULMINEN DICHO CURSO HABIENDO ADQUIRIDO LOS CONOCIMIENTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA VECTORIAL PARA ABORDAR EL ESTUDIO DE FÍSICA I CON UN NIVEL ADECUADO AL ÁMBITO UNIVERSITARIO. EN DICHA ASIGNATURA SE INTRODUCE A LA MECÁNICA CLÁSICA O DE NEWTON, ESTUDIANDO LAS LEYES QUE GOBIERNAN EL MOVIMIENTO COMO PRODUCTO DE LA INTERACCIÓN ENTRE CUERPOS. PARA LOGRAR ESTE OBJETIVO, SE DEBEN REPASAR Y EN ALGUNOS CASOS APRENDER, CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA Y SISTEMAS DE REFERENCIA PARA HACER POSIBLE LA REPRESENTACIÓN, DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DISTINTOS FENÓMENOS FÍSICOS QUE SE ESTUDIARÁN.
ESTE MATERIAL DE ESTUDIO ESTÁ ORIENTADO A DESPEJAR LA DIFICULTAD MATEMÁTICA PARA QUE EL FUTURO ALUMNO DE PRIMER AÑO PUEDA CONCENTRARSE EN LO QUE ES PROPIO DE LA FÍSICA: SUS CONCEPTOS Y SUS LEYES. LOS TEMAS DEL CURSO SE PRESENTAN EN UN PRIMER BLOQUE INTRODUCTORIO A MAGNITUDES, DIMENSIONES Y SISTEMAS DE UNIDADES; LUEGO SE ENCUENTRAN LOS BLOQUES DEDICADOS A TEMAS DE GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA, SISTEMAS DE REFERENCIA Y FINALMENTE EL TEMA DEDICADO A VECTORES CUYO APRENDIZAJE CONSTITUYE EL OBJETIVO PRIMORDIAL DEL CURSO. TODOS LOS TEMAS CONTIENEN LOS ASPECTOS TEÓRICOS, PROBLEMAS RESUELTOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS COMO EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA.

EL AUTOR ES INGENIERO MECÁNICO (UTN-1988), DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA (UNC-1995) Y PROFESOR ASOCIADO ORDINARIO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS. EN SU CARÁCTER DE DOCENTE E INVESTIGADOR DE LA INSTITUCIÓN, ESTÁ A CARGO DE LAS CÁTEDRAS FÍSICA I Y MECÁNICA DEL CONTINUO DE LA CARRERA DE BIOINGENIERÍA Y DEL GRUPO BIOMECÁNICA COMPUTACIONAL DONDE SE DESARROLLAN DISTINTAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN DE FENÓMENOS MECÁNICOS RELACIONADOS CON EL CUERPO HUMANO. ES DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO FÍSICO-QUÍMICA Y MIEMBRO DEL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD. ANUALMENTE ESTÁ A CARGO DEL CURSO EN EL ÁREA FÍSICA PARA ALUMNOS INGRESANTES.

ISBN: 950-698-121-3